# PRÉCIS
# D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

# A LA MÊME LIBRAIRIE

---

*Précis de Mécanique rationnelle* (cours et problèmes), par G. BOULIGAND, professeur à l'Université de Poitiers. — Un vol. 25 × 16cm. 36 fr. »

*Initiation aux Méthodes vectorielles et aux applications géométriques de l'Analyse*, par G. BOULIGAND et G. RABATÉ, chargé de conférences à la Faculté des sciences de Poitiers. — Un vol. 22 × 14cm. 25 fr. »

*Compléments de Géométrie moderne*, par CH. MICHEL, docteur ès sciences, professeur au lycée Saint-Louis. — Un vol. 22 × 14cm . . 30 fr. »

*Sur certaines transformations par polaires réciproques relativement au complexe linéaire et à la sphère*, par L. LONG, docteur ès sciences, professeur au lycée de Rennes. — Un vol. 25 × 16cm . . . 20 fr. »

*Conférences sur les transformations en géométrie plane*, par W. de TANNENBERG, docteur ès sciences, ancien professeur de l'Université de Bordeaux. — Un vol. 25 × 16cm. . . . . . . . . . . . . . . 8 fr. »

*Leçons de Chimie physique*, par M. VÈZES, professeur honoraire à la Faculté des sciences de Bordeaux, avec préface de G. URBAIN, membre de l'Institut. — Un vol. 25 × 16cm, de VIII-548 pages . . . 50 fr. »

---

# PRÉCIS
# D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES CANDIDATS AU CERTIFICAT

DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

PAR

E. LAINÉ

PROFESSEUR A LA FACULTÉ LIBRE
DES SCIENCES D'ANGERS

TOME II

THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

AVEC LA COLLABORATION DE

G. BOULIGAND

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

PARIS
LIBRAIRIE VUIBERT
BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1927

# AVERTISSEMENT

Ce deuxième volume contient, toujours dans les limites du programme du certificat de Calcul différentiel et intégral, la théorie des équations différentielles, la géométrie infinitésimale, la théorie des équations aux dérivées partielles, et enfin, sous forme d'exercices complémentaires, les éléments de quelques théories (fonctions elliptiques, prolongement analytique, séries trigonométriques) qui peuvent intéresser les candidats à l'agrégation.

J'ai utilisé, pour l'exposé de la Géométrie, les notations du Calcul vectoriel. Quelle que soit l'opinion qu'on professe sur l'intérêt intrinsèque de ce Calcul, on ne peut lui refuser le mérite d'une élégante simplicité. Au reste, l'effort d'adaptation qu'il exige est des plus minces, et c'est sans doute sur cette considération que l'enseignement supérieur français a cessé de se montrer réfractaire à une innovation si naturelle : depuis quelques années on voit s'y dessiner dans ce sens des courants significatifs.

C'est pour moi un devoir très agréable de remercier M. Bouligand de tout ce qu'il a fait pour ce *Précis d'Analyse*. Non seulement il a bien voulu accepter d'y exposer la théorie des équations aux dérivées partielles, mais il n'a cessé pour tout le reste de l'ouvrage, de me prodiguer les conseils les plus éclairés, et il me serait bien difficile de signaler un seul chapitre qui ne lui soit redevable de quelque éclaircissement ou de quelque remarque suggestive. C'est par lui, d'ailleurs, que j'ai été initié aux méthodes vectorielles, et en plus d'un passage de la partie géométrique on pourra aisément retrouver ses procédés personnels et sa propre inspiration.

Je dois exprimer aussi mes bien vifs remerciements à mon collègue et ami M. l'abbé Pasquier, dont le concours m'a été si précieux pour la correction des épreuves, et dont les judicieux avis m'ont permis à maintes reprises de rectifier ou d'améliorer ma rédaction primitive.

E. Lainé.

# PRÉCIS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

TOME II

---

## LIVRE III

## THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

---

### CHAPITRE PREMIER

### PRÉLIMINAIRES

#### § I. — Fonctions majorantes.

**143.** Considérons une fonction $f(x)$, de la variable *complexe* $x$, holomorphe au voisinage du point $x_0$; pour simplifier nous prendrons $x_0 = 0$. On a alors pour $f(x)$ au voisinage de l'origine un développement de la forme

$$f(x) = u_0 + u_1 x + \dots + u_n x^n + \dots.$$

Soit d'autre part

$$v_0 + v_1 x + \dots + v_n x^n + \dots$$

une série entière, à coefficients réels, positifs, et tels que l'on ait, quel que soit $n$,

$$v_n \geqslant |u_n|.$$

Si cette série converge dans un cercle $\Gamma$ de rayon $\rho > 0$, on dit que sa somme $\varphi(x)$ est une *fonction majorante* pour $f(x)$ dans le cercle $\Gamma$. Il est clair que le cercle de convergence de la première série est au moins égal à celui de la seconde.

Soit alors $P_n(u_0, u_1, \dots u_n)$ un polynome dépendant des $n+1$ premiers coefficients $(u_i)$, *et dont les coefficients sont réels et positifs*; on aura manifestement

$$|P_n(u_0, u_1, \dots u_n)| \leqslant P_n(v_0, v_1, \dots v_n).$$

Par exemple si $\varphi(x)$ est une fonction majorante pour $f(x)$, $[\varphi(x)]^m$ sera une fonction majorante pour $[f(x)]^m$, $m$ désignant un entier positif. Si $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont respectivement majorantes pour $f_1(x)$ et $f_2(x)$, $\varphi_1(x).\varphi_2(x)$ est majorante pour $f_1(x).f_2(x)$. D'une façon générale, soient $y(x)$, $z(x)$, ..., $u(x)$ un nombre quelconque de fonctions ayant respectivement pour fonctions majorantes $Y(x)$, $Z(x)$, ..., $U(x)$, et soit $P(y, z, \ldots u)$ un polynome à coefficients réels et positifs : la fonction $P(Y, Z, \ldots U)$ est majorante pour $P(y, z, \ldots u)$.

Considérons en second lieu une fonction de deux variables $x$ et $y$, holomorphe par rapport à ces variables au voisinage des valeurs $x=0$, $y=0$. On aura pour cette fonction $f(x, y)$ dans ce voisinage un développement de la forme

$$f(x, y) = u_{00} + u_{10}x + u_{01}y + \ldots + u_{n0}x^n + u_{n-1,1}x^{n-1}y + \ldots + u_{0n}y^n + \ldots.$$

Soit $v_{00} + v_{10}x + v_{01}y + \ldots + v_{n0}x^n + v_{n-1,1}x^{n-1}y + \ldots + v_{0n}y^n + \ldots$ une *série entière à deux variables*, telle que l'on ait, quels que soient les entiers $m$ et $p$,

$$v_{mp} \geqslant |u_{mp}|.$$

Si cette série est convergente quand $x$ et $y$ restent à l'intérieur ou sur le contour de deux cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$, de rayon R, ayant pour centres les points-origines de leurs plans respectifs, la somme $\varphi(x, y)$ de cette série est dite une *fonction majorante* pour $f(x, y)$ dans le domaine $(\Gamma_1, \Gamma_2)$.

Soit alors $P_n(u_{mp})$ un polynome à coefficients réels et positifs, dépendant des coefficients $u_{mp}$ pour lesquels on a $m+p \leqslant n$. On aura évidemment

$$|P_n(u_{mp})| \leqslant P_n(v_{mp});$$

on en déduit les mêmes conclusions que pour les fonctions d'une variable.

Les définitions précédentes s'étendent telles quelles aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

**144.** Voyons maintenant comment on détermine une fonction majorante pour une fonction donnée.

Soit d'abord $f(x)$ la fonction donnée à une variable,

$$f(x) = u_0 + u_1x + \ldots + u_nx^n + \ldots.$$

Supposons la série $(u_nx^n)$ convergente dans un cercle $\Gamma$ de centre O et de rayon R et sur son contour. On sait que

$$u_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz.$$

Soit M le maximum du module de $f(z)$ sur le cercle $\Gamma$; on aura

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{R^{n+1}}.M.2\pi R = \frac{M}{R^n}.$$

Posons alors

$$\varphi(x) = \frac{M}{1 - \frac{x}{R}} = M + \frac{M}{R}x + \ldots + \frac{M}{R^n}x^n + \ldots ;$$

la fonction $\varphi(x)$ sera majorante pour $f(x)$ dans le cercle $\Gamma$.

Prenons en second lieu une fonction de deux variables

$$f(x, y) = u_{00} + u_{10}x + u_{01}y + \ldots,$$

holomorphe à l'intérieur et sur le contour du domaine $(\Gamma_1, \Gamma_2)$ précédemment considéré. On aura (n° 142)

$$u_{mn} = \frac{1}{m!\,n!}\left(\frac{\partial^{m+n}f}{\partial x^m \partial y^n}\right)_0 .$$

On a établi, dans l'étude des fonctions analytiques de plusieurs variables, l'inégalité

$$\left|\left(\frac{\partial^{m+n}f}{\partial x^m \partial y^n}\right)_0\right| \leqslant \frac{m!\,n!}{R^{m+n}}M,$$

M désignant le maximum du module de $f(x, y)$ quand $x$ et $y$ sont sur les circonférences $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$. On aura donc

$$|u_{mn}| \leqslant \frac{M}{R^{m+n}}.$$

Posons alors

$$\varphi(x, y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{R}\right)\left(1 - \frac{y}{R}\right)} = M\left(1 + \frac{x}{R} + \ldots + \frac{x^m}{R^m} + \ldots\right)\left(1 + \frac{y}{R} + \ldots + \frac{y^n}{R^n} + \ldots\right)$$

$$= M + \frac{M}{R}x + \frac{M}{R}y + \ldots + \frac{M}{R^{m+n}}x^m y^n + \ldots ;$$

il résulte des considérations précédentes que $\varphi(x, y)$ est une fonction majorante pour $f(x, y)$ dans le domaine $(\Gamma_1, \Gamma_2)$.

## § II. — Séries doubles.

**145.** Considérons un tableau rectangulaire dit à *double entrée*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_{00}$ | $a_{01}$ | $a_{02}$ | ... | $a_{0n}$ | ... |
| $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | ... | $a_{1n}$ | ... |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |
| $a_{m0}$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | ... | $a_{mn}$ | ... |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |

indéfini vers la droite et vers le bas, où $a_{mn}$ désigne, quels que soient $m$ et $n$, une quantité réelle et positive. On dit que ce tableau représente une *série double* à termes réels et positifs.

Imaginons une suite de courbes $C_1$, $C_2$, ... $C_n$, ... limitées au cadre du tableau et telles que chacune soit extérieure à toutes les précédentes : soit $S_i$ la somme des termes du tableau compris entre le cadre et la courbe $C_i$. Supposons en outre que les courbes $C_n$ s'éloignent indéfiniment dans tous les sens, *chacune d'elles restant néanmoins tout entière à distance finie*, et que la somme $S_n$ tende vers une limite S quand $n$ croît indéfiniment.

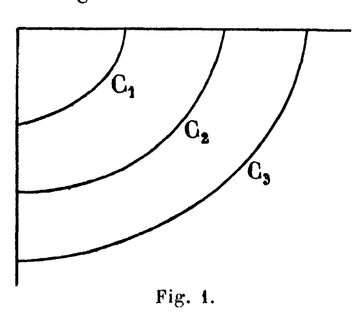


Fig. 1.

Soit $C'_1$, $C'_2$, ... $C'_m$, ... une autre suite de courbes ayant les mêmes propriétés, $S'_1$, $S'_2$, ... $S'_m$, ... les sommes correspondantes. Quelle que soit la courbe $C'_m$, on pourra toujours trouver une courbe $C_n$ qui lui soit extérieure : on aura donc

$$S'_m < S_n < S,$$

ce qui montre que les sommes $S'_m$ ont une limite $S'$ telle que $S' \leqslant S$. En faisant le raisonnement en sens inverse, on verrait de même que $S \leqslant S'$. On a donc nécessairement $S = S'$. Autrement dit la limite S est indépendante de la forme des courbes considérées. On dit alors que la série double $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}$ est convergente et a pour somme S.

Considérons maintenant la série formée par les termes situés sur la ligne de rang $i+1$ ; soient $l_i$ sa somme, $S_1$ la somme de la série de terme général $l_i$. Si l'on avait $S_1 > S$, on pourrait trouver un nombre fini de termes $a_{ik}$ ayant une somme supérieure à S, et par suite une courbe $C_n$ telle que $S_n > S$, ce qui est impossible. On ne peut d'ailleurs avoir $S_1 < S$, car quelle que soit la courbe $C_n$ on peut prendre un nombre de lignes suffisamment grand pour que tous les termes de la somme $S_n$ y soient contenus, et par suite on a toujours

$$S_n < S_1, \qquad \text{donc} \qquad S = S_1.$$

Il est clair qu'on peut raisonner de la même façon sur les colonnes.

Autrement dit, étant donné un *tableau convergent*, à termes réels et positifs, on peut faire indifféremment la somme de ce tableau par lignes ou par colonnes.

Prenons maintenant un tableau $T_1(a_{mn})$ à termes quelconques, réels ou complexes. Posons

$$|a_{mn}| = A_{mn}.$$

Si le tableau $T(A_{mn})$ est convergent, le tableau $T_1$ est dit *absolument convergent*. Revenons à la famille de courbes $C_1$, $C_2$, ... $C_n$, ... et soient $s_n$ et $S_n$ les sommes associées à la courbe $C_n$ pour les tableaux $T_1$ et T respectivement. Les termes du tableau $T_1$ compris entre les courbes $C_n$ et $C_{n-1}$ ont

une somme au plus égale en module à la somme des termes du tableau T compris entre les mêmes courbes; on a donc

$$|s_n - s_{n-1}| \leqslant S_n - S_{n-1}.$$

La série $$S_1 + (S_2 - S_1) + \ldots + (S_n - S_{n-1}) + \ldots$$

étant convergente par hypothèse, la série

$$s_1 + (s_2 - s_1) + \ldots + (s_n - s_{n-1}) + \ldots$$

est absolument convergente : soit $s$ sa somme. Je dis que cette somme est indépendante de la famille de courbes $C_1$, $C_2$, ... $C_n$, ....

En effet soit $C'_1$, $C'_2$, ... $C'_n$, ... une seconde famille de courbes satisfaisant aux mêmes conditions, $s'_n$ la somme associée à la courbe $C'_n$ : supposons que $s'_n$ tende vers une limite $s' \neq s$, et soit $\varepsilon$ un nombre positif tel que

$$\varepsilon < |s' - s|.$$

La somme $S_n$ ayant une limite, on peut trouver un entier $n$ assez grand pour que la somme des termes du tableau T extérieurs à la courbe $C_n$ soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$. Soit alors $C'_m$ une courbe de la seconde famille tout entière extérieure à la courbe $C_n$ : la somme des termes du tableau T compris entre les courbes $C_n$ et $C'_m$ et celle des termes extérieurs à $C'_m$ sont naturellement aussi inférieures à $\frac{\varepsilon}{3}$. On aurait donc les trois inégalités

$$|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |s_n - s'_m| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |s'_m - s'| < \frac{\varepsilon}{3},$$

et par suite $$|s - s'| < \varepsilon,$$

ce qui est impossible. Ainsi, quelle que soit la courbe $C_n$, la somme $s_n$ tend vers une limite bien déterminée, $s$, qui est, par définition, la somme du tableau $T_1$.

Posons $\lambda_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}$, $\sigma = \sum_{0}^{\infty} \lambda_i$; si $\sigma \neq s$, soit $0 < \varepsilon < |\sigma - s|$. On peut trouver deux entiers N et N′ tels que

$$\sum_{i=N}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{ik}| < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=N'}^{\infty} |a_{mk}| < \frac{\varepsilon}{4N} \qquad \text{pour} \qquad m < N.$$

Alors si l'on choisit une courbe $C_n$ telle que la somme $s_n$ soit formée des NN′ termes $a_{ik}$ tels que $i < N$, $k < N'$, on aura

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left|\sigma - \sum_{0}^{N-1} \lambda_i\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \left|\sum_{0}^{N-1} \lambda_i - s_n\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \text{d'où} \qquad |s - \sigma| < \varepsilon,$$

ce qui est impossible. Donc $\sigma = s$, et par suite ici encore on peut faire indifféremment la somme du tableau $T_1$ par lignes ou par colonnes.

Supposons enfin que les termes du tableau $T_1(u_{mn})$ soient fonctions d'un certain nombre de variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Appelons *point*, pour simplifier, tout système de valeurs attribuées aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Si, en tous les points d'un certain *domaine* D, le tableau $T_1$ est absolument convergent, on dit qu'il définit une *série double convergente* dans le domaine D.

## § III. — Quelques propriétés des séries entières.

**146.** Soient

$$f(y) = a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n + \ldots \tag{1}$$

une série entière en $y$, R le rayon de son cercle de convergence. Soient de même

$$y = \varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots \tag{2}$$

une série entière en $x$, $\rho$ le rayon de son cercle de convergence.

Remplaçons, dans la série (1), $y$, $y^2$, ... par leurs valeurs tirées de (2) et mises sous forme de séries entières en $x$. On obtiendra un tableau à double entrée

$$\left\{\begin{array}{llll} a_0 + a_1 b_0 & + a_2 b_0^2 & & + \ldots \\ \quad + a_1 b_1 x & + 2a_2 b_0 b_1 x & & + \ldots \\ \quad + a_1 b_2 x^2 & + a_2(b_1^2 + 2b_0 b_2)x^2 & & + \ldots \\ \quad + \ldots, & & & \end{array}\right. \tag{3}$$

où la colonne de rang $n+1$ donne le développement de $a_n y^n$, la ligne de rang $m+1$ ne contenant que des termes en $x^m$. Supposons qu'il existe un nombre positif $r$ tel que, pour $|x| < r$, le tableau (3) soit absolument convergent. En faisant sa somme par lignes, on obtiendra une série entière en $x$,

$$F(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots,$$

convergente dans un cercle de rayon $r$; on dit que cette série représente le résultat de la substitution de la série (2) dans la série (1). Nous allons chercher à quelle condition cette substitution est légitime, c'est-à-dire à quelle condition il existera un nombre $r \neq 0$, tel que pour $|x| < r$ le tableau (3) soit absolument convergent.

Ce tableau devant, en particulier, être absolument convergent pour $x = 0$, la série

$$a_0 + a_1 b_0 + \ldots + a_n b_0^n + \ldots$$

doit être absolument convergente, ce qui exige

$$|b_0| < R.$$

Nous allons établir que cette condition nécessaire est aussi suffisante.

Nous pouvons toujours supposer que les séries (1) et (2) sont convergentes pour $y = R$ et $x = \rho$. S'il n'en était pas ainsi, on prendrait pour R et $\rho$ des valeurs très peu inférieures aux rayons des deux cercles de convergence. Soient alors $m$ et M des limites supérieures des termes $|b_n|\rho^n$ et $|a_n|R^n$ respectivement, $r_1$ un nombre positif tel que l'on ait

$$\frac{r_1}{\rho} = \frac{|b_0|}{m} \leqslant 1.$$

La fonction
$$\frac{|b_0|}{1-\frac{x}{r_1}}$$
est majorante pour la fonction $\varphi(x)$ dans le cercle de centre O et de rayon $r_1$, car on a
$$\frac{|b_0|}{1-\frac{x}{r_1}} = |b_0| + \frac{|b_0|}{r_1}x + \ldots + \frac{|b_0|}{r_1^n}x^n + \ldots,$$
et, d'autre part,
$$|b_n r_1^n| = |b_n \rho^n| \left(\frac{r_1}{\rho}\right)^n \leqslant m\frac{r_1}{\rho}\left(\frac{r_1}{\rho}\right)^{n-1} \leqslant |b_0|,$$
par suite
$$|b_n| \leqslant \frac{|b_0|}{r_1^n}.$$

Ceci posé, la série (1) admet elle-même une fonction majorante de la forme
$$\frac{M}{1-\frac{y}{R}} = M + M\frac{y}{R} + \ldots + M\frac{y^n}{R^n} + \ldots;$$
si, dans cette dernière série, on remplace $y$ par $\frac{|b_0|}{1-\frac{x}{r_1}}$ et qu'on développe les diverses puissances de $y$ suivant les puissances croissantes de $x$, on aura un nouveau tableau à double entrée,
$$(4)\quad \left\{\begin{array}{lllll} M + M\frac{|b_0|}{R} & + M\left(\frac{|b_0|}{R}\right)^2 & + \ldots + M\left(\frac{|b_0|}{R}\right)^n & + \ldots \\ \quad + M\frac{|b_0|}{R}\frac{x}{r_1} & + 2M\left(\frac{|b_0|}{R}\right)^2\frac{x}{r_1} & + \ldots + nM\left(\frac{|b_0|}{R}\right)^n\frac{x}{r_1} & + \ldots \\ \quad + M\frac{|b_0|}{R}\left(\frac{x}{r_1}\right)^2 + \ldots & & & \\ \quad + \ldots & & & \end{array}\right.$$
analogue au tableau (3), la colonne de rang $n+1$ donnant le développement de
$$M\left(\frac{|b_0|}{R}\right)^n\left(1-\frac{x}{r_1}\right)^{-n}.$$

En remplaçant dans le tableau (4) $x$ par $|x|$, on aura un tableau T à termes positifs. Nous supposerons $|x| < r_1$; la somme du tableau T par colonnes se présentera alors sous la forme d'une série de terme général
$$M\left[\frac{|b_0|}{R\left(1-\frac{|x|}{r_1}\right)}\right]^n.$$

Cette série sera convergente si
$$|b_0| < R\left(1-\frac{|x|}{r_1}\right),$$
ou
$$|x| < r_1\left(1-\frac{|b_0|}{R}\right).$$

Posons
$$r = r_1\left(1 - \frac{|b_0|}{R}\right).$$

Il résulte de tout ce qui précède que le tableau (3) définit une série double absolument convergente dans le cercle de rayon $r$; en effet, le coefficient d'un terme du tableau (3) se déduit, *par addition et multiplication seulement*, des coefficients $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$, et le coefficient du terme correspondant du tableau (4) s'obtient en remplaçant les $a_k$ par $\frac{M}{R^k}$ et les $b_k$ par $\frac{|b_0|}{r_1^k}$; le tableau (4) étant absolument convergent pour $|x| < r$, il en est de même du tableau (3).

Le raisonnement précédent suppose essentiellement $b_0 \neq 0$, car si l'on avait $b_0 = 0$, on aurait $r_1 = 0$.

Supposons maintenant $b_0 = 0$; on pourra prendre comme fonction majorante de $\varphi(x)$ la fonction
$$\frac{m}{1 - \frac{x}{\rho}} - m = \frac{mx}{\rho - x},$$
où $m$ désigne toujours une limite supérieure des modules $|b_n \rho^n|$. En répétant le raisonnement fait dans l'hypothèse $b_0 \neq 0$, on verrait alors que le tableau (3) définit une série double absolument convergente dans le cercle de rayon $\rho \frac{R}{R+m}$.

En résumé, *pour que la substitution de la série* (2) *dans la série* (1) *donne un développement convergent dans un cercle de rayon non nul* [1], *il faut et il suffit que chacune de ces séries converge dans un cercle de rayon non nul et que l'on ait en outre*
$$|b_0| < R.$$

En faisant alors la somme du tableau (3) par lignes, on aura
$$f(y) = f[\varphi(x)] = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$
avec
$$c_0 = a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \ldots,$$
$$c_1 = a_1 b_1 + 2a_2 b_0 b_1 + \ldots,$$
$$c_2 = a_1 b_2 + a_2(b_1^2 + 2b_0 b_2) + \ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

**147**. Considérons une série entière $(a_n x^n)$ sans terme constant, convergente dans un cercle de rayon non nul; posons

(5) $$y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + \ldots;$$

---

[1] Il est clair que les raisonnements qui précèdent mettent seulement en évidence une limite *inférieure* de ce rayon de convergence.

$x$ est une certaine fonction de $y$, et il est clair que cette fonction admet au moins une détermination qui s'annule pour $y=0$, puisque les valeurs $x=0$ et $y=0$ vérifient la relation (5). Nous allons chercher si cette détermination est holomorphe à l'origine, autrement dit si elle admet un développement

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \ldots + \alpha_n y^n + \ldots \tag{6}$$

convergent dans un cercle de rayon non nul.

*S'il existe un tel développement*, on pourra l'obtenir de la façon suivante. La substitution de (6) dans (5) étant alors légitime (n° 146), on aura, en identifiant les deux membres de la relation (5) après substitution,

$$\begin{aligned} a_1\alpha_1 &= 1, \\ a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1^2 &= 0, \\ a_1\alpha_3 + 2a_2\alpha_1\alpha_2 + a_3\alpha_1^3 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Sous la seule condition $a_1 \neq 0$, on voit que tous les coefficients $\alpha_i$ sont déterminés, et cela *d'une façon unique*. Il en résulte que la fonction $x(y)$ définie par l'équation (5), où on suppose $a_1 \neq 0$, ne peut admettre plus d'une détermination holomorphe à l'origine et s'annulant en ce point : si cette détermination existe, son développement est certainement fourni par le calcul d'identification que nous venons d'exposer.

Inversement, supposons que, sans faire aucune hypothèse sur l'existence d'une détermination $x(y)$ holomorphe au voisinage de l'origine et nulle en ce point, nous ayons effectué le calcul des coefficients $\alpha_i$ par la méthode précédente, et que ces coefficients aient été remplacés par leurs valeurs dans le développement (6). Si le développement ainsi obtenu converge dans un cercle de rayon non nul, il représente dans ce cercle une fonction holomorphe $x$ de la variable $y$ satisfaisant à l'équation (5), puisque $x$ étant remplacé par ce développement dans le second membre de (5), opération qui est alors légitime, le résultat de la substitution se réduit à $y$, d'après la façon même dont les coefficients $\alpha_i$ ont été calculés. Il suffit donc que le développement (6) soit convergent dans un cercle de rayon non nul pour qu'il représente une fonction $x(y)$ satisfaisant à l'équation (5).

Ceci posé, remarquons que, $a_1$ étant différent de zéro, on peut mettre la relation (5) sous la forme

$$x = \lambda y + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n + \ldots. \tag{7}$$

En substituant (6) dans (7), on aura, pour calculer les coefficients inconnus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, les équations

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda, \\ \alpha_2 &= b_2\alpha_1^2, \\ \alpha_3 &= 2b_2\alpha_1\alpha_2 + b_3\alpha_1^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Il en résulte qu'on obtient tous les coefficients $\alpha_i$ en combinant *par addition et par multiplication seulement* les coefficients du second membre de la relation (7).

La série $$b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_nx^n + \ldots$$
étant évidemment convergente, par hypothèse, dans un cercle de rayon $\rho \neq 0$, soit $\dfrac{mx^2}{1-\dfrac{x}{\rho}}$ une fonction majorante pour cette série. Posons $l = |\lambda|$, et considérons l'équation

$$(8) \qquad x = ly + \frac{mx^2}{1-\dfrac{x}{\rho}};$$

si nous remplaçons la fraction du second membre par son développement suivant les puissances de $x$, nous avons une relation

$$x = ly + B_2x^2 + B_3x^3 + \ldots + B_nx^n + \ldots,$$

dont le second membre sera majorant pour le second membre de (7); on en déduira pour $x$, par la méthode d'identification qui a fourni le développement (6), un développement

$$(9) \qquad x = A_1y + A_2y^2 + \ldots + A_ny^n + \ldots$$

qui sera majorant pour le second membre de (6) : donc si ce développement est convergent dans un cercle de rayon non nul, il en sera de même de (6).

Or l'équation (8), mise sous forme entière en $x$, est une équation du second degré dont une racine s'annule avec $y$ : cette racine, qui a pour expression

$$x = \frac{1 + \dfrac{ly}{\rho} - \sqrt{\left(1+\dfrac{ly}{\rho}\right)^2 - 4ly\left(\dfrac{1}{\rho}+m\right)}}{2\left(\dfrac{1}{\rho}+m\right)},$$

est une fonction de $y$ holomorphe au voisinage de $y=0$, puisque la valeur $y=0$ n'annule pas la quantité sous le radical. Elle admet donc un développement convergent dans un cercle de rayon non nul, et, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, ce développement est nécessairement identique à (9) : il en résulte que le développement (6) est lui aussi convergent dans un cercle de rayon non nul.

Ainsi, *étant donné un développement tel que* (5), *convergent dans un cercle de rayon non nul, on pourra en déduire un développement tel que* (6), *également convergent dans un cercle de rayon non nul.*

**148.** Si $a_1 = 0$, le raisonnement ne s'applique plus. Considérons d'abord la relation

$$t^m = a_mx^m + a_{m+1}x^{m+1} + \ldots,$$

où $a_m \neq 0$, le développement du second membre étant convergent dans un

cercle de rayon non nul. Cherchons à satisfaire à cette équation en faisant dans le premier membre la substitution

$$t = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots .$$

On aura, pour déterminer les coefficients $b_i$, la suite d'équations

$$b_1^m = a_m,$$
$$m b_1^{m-1} b_2 = a_{m+1},$$
$$m b_1^{m-1} b_3 + \frac{m(m-1)}{1.2} b_1^{m-2} b_2^2 = a_{m+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On voit donc que, *le premier coefficient* $b_1$ *étant choisi*, tous les autres sont déterminés d'une façon unique. Soit $\beta$ une quantité bien déterminée, telle que $\beta^m = a_m$. On aura, en désignant par $\alpha$ une racine $m^e$ de l'unité, $b_1 = \alpha\beta$, et tous les coefficients $b_i$ s'exprimeront rationnellement en $\alpha$, $\beta$, $a_{m+1}$, $a_{m+2}$, .... On aura ainsi pour $t$ un développement tel que

$$t = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

qui sera en réalité équivalent à $m$ développements différents, correspondant aux $m$ valeurs de $\alpha$.

Il résulte d'un théorème général, dû à WEIERSTRASS, que ce développement est, quel que soit $\alpha$, convergent dans un cercle de rayon non nul. Nous admettrons ce point sans démonstration.

On en déduira pour $x$ (n° 147) un développement

$$x = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots$$

convergent, lui aussi, dans un cercle de rayon non nul.

Considérons alors l'équation

$$y = a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \ldots \; (a_m \neq 0,\ m > 1).$$

Il suffira de poser $y = t^m$ pour en tirer

$$x = \alpha_1 y^{\frac{1}{m}} + \alpha_2 y^{\frac{2}{m}} + \ldots .$$

D'après ce qu'on a vu plus haut, dans l'expression des $\alpha_i$ figure une racine $m^e$ quelconque de l'unité, $\alpha$ : on aura donc $m$ développements différents. On démontre qu'on retrouve ces $m$ développements en fixant la racine $\alpha$, ce qui détermine d'une manière univoque les coefficients $\alpha_i$, et convenant de donner successivement à $y^{\frac{1}{m}}$ ses $m$ déterminations.

On a donc, en définitive, obtenu pour $x$ un développement suivant les puissances de $y^{\frac{1}{m}}$, convergent dans un cercle de rayon non nul.

REMARQUE. — Le théorème démontré au n° 147 n'est qu'un cas particulier du théorème suivant, qui se démontre d'une façon tout à fait analogue par la méthode des fonctions majorantes.

Considérons l'équation

$$a_0x + b_0y + a_1x^2 + 2b_1xy + \ldots = 0,$$

où le premier membre est une série entière en $x$ et $y$ convergente dans un certain domaine, le coefficient $b_0$ étant *essentiellement* différent de zéro. Cette équation définit une fonction et une seule, $y(x)$, s'annulant à l'origine, et développable en série entière dans un cercle de rayon non nul.

Le théorème peut encore s'énoncer comme suit :

*Soit* $F(x, y)$ *une fonction analytique des deux variables* $x$ *et* $y$, *holomorphe au voisinage du point* $(x_0, y_0)$. *Si la dérivée* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *n'est pas nulle en ce point, l'équation*

$$F(x, y) = 0,$$

*supposée satisfaite pour les valeurs* $x = x_0$ *et* $y = y_0$, *définit une fonction* $y(x)$ *et une seule qui soit holomorphe au voisinage du point* $x_0$ *et prenne en ce point la valeur* $y_0$.

Plus généralement, on démontre d'une façon analogue le théorème suivant :

*Soit* $F(x_1, x_2, \ldots x_n, y)$ *une fonction analytique des variables* $x_1, \ldots x_n, y$, *holomorphe au voisinage du point* $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0, y_0)$ *et s'annulant en ce point. Si la dérivée* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *n'est pas nulle en ce point, l'équation*

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n, y) = 0$$

*définit une fonction* $y(x_1, \ldots, x_n)$ *et une seule qui soit holomorphe au voisinage du point* $(x_1^0, \ldots x_n^0)$ *et prenne en ce point la valeur* $y_0$.

Enfin ce théorème n'est lui-même qu'un cas particulier du théorème suivant, qui résume toute la théorie des fonctions analytiques implicites :

*Soient* $F_1, F_2, \ldots F_p$ *des fonctions analytiques des variables* $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_p$, *holomorphes au voisinage du point* $(x_1^0, \ldots x_n^0, y_1^0, \ldots y_p^0)$ *et nulles en ce point. Si le jacobien* $\frac{D(F_1, F_2, \ldots F_p)}{D(y_1, y_2, \ldots y_p)}$ *n'est pas nul au point considéré, les équations*

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots \qquad F_p = 0$$

*définissent* $p$ *fonctions et* $p$ *seulement,* $y_1(x_1, \ldots x_n), y_2(x_1, \ldots x_n), \ldots y_p(x_1 \ldots x_n)$, *qui soient holomorphes au voisinage du point* $(x_1^0, \ldots x_n^0)$ *et prennent en ce point les valeurs* $y_1^0, y_2^0, \ldots y_p^0$ *respectivement.*

---

## CHAPITRE II

## THÉORÈMES D'EXISTENCE. INTÉGRALE SINGULIÈRE

### § I. — Théorèmes d'existence.

**149.** Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

et supposons que la fonction $f(x, y)$ soit holomorphe au voisinage du point $(x_0, y_0)$. Pour simplifier l'écriture, nous prendrons $x_0 = y_0 = 0$.

Cherchons alors si l'équation (1) admet une intégrale holomorphe au voisinage de l'origine et nulle en ce point; soit

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{2}$$

le développement de l'intégrale inconnue au voisinage de l'origine. On a, pour la fonction $f(x, y)$ au voisinage des valeurs $x = 0$, $y = 0$, un développement de la forme

$$f(x, y) = \alpha_{00} + \alpha_{10} x + \alpha_{01} y + \ldots + \alpha_{ik} x^i y^k + \ldots;$$

l'équation (1) peut donc s'écrire

$$\frac{dy}{dx} = \alpha_{00} + \alpha_{10} x + \alpha_{01} y + \ldots + \alpha_{ik} x^i y^k + \ldots.$$

Substituons à $y$, dans cette dernière équation, le développement (2). On aura, en identifiant,

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_{00}, \\ 2a_2 &= \alpha_{10} + \alpha_{01} a_1, \\ 3a_3 &= \alpha_{20} + \alpha_{11} a_1 + \alpha_{02} a_1^2 + \alpha_{01} a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

On voit que les coefficients inconnus $a_i$ sont déterminés successivement sans ambiguïté. On en conclut que *s'il existe une intégrale holomorphe au voisinage de l'origine*, cette intégrale est unique et son développement est nécessairement celui que nous venons de former.

Jusqu'aux travaux de CAUCHY, on avait admis sans démonstration que le

développement (2) était convergent dans un cercle de rayon non nul, et par suite définissait une fonction holomorphe au voisinage de l'origine, nulle en ce point et satisfaisant à l'équation (1), d'après la façon même dont les coefficients $a_i$ ont été calculés. Or, comme l'a remarqué CAUCHY, la convergence du développement (2) n'est nullement évidente : c'est cette convergence que nous allons maintenant établir en utilisant la méthode des fonctions majorantes.

Observons d'abord que les coefficients $a_i$ fournis par les formules (3) sont déduits des coefficients $\alpha_i$ *par addition et multiplication seulement*. Si la fonction $f(x, y)$ est holomorphe quand $|x|$ et $|y|$ restent inférieurs à $\rho$, on pourra prendre pour $f(x, y)$ une fonction majorante de la forme

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)}.$$

Considérons alors l'équation différentielle

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)};$$

si nous formons comme précédemment le développement, au voisinage de l'origine, de l'intégrale qui s'annule en ce point, nous obtiendrons un développement

$$(5) \qquad y = A_1x + A_2x^2 + \dots$$

qui sera certainement majorant pour le développement (2); par suite, si le développement (5) converge dans un cercle de rayon non nul, il en sera de même du développement (2).

Or le développement (5) est nécessairement convergent si l'équation (4) admet une intégrale holomorphe au voisinage de l'origine et nulle en ce point. Intégrons cette équation par séparation des variables : on aura

$$\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^2 = 2M \operatorname{Log}\left(1-\frac{x}{\rho}\right) + C^{te}.$$

On en déduit immédiatement une intégrale nulle à l'origine, savoir

$$y = \rho - \rho\sqrt{1 + 2M \operatorname{Log}\left(1-\frac{x}{\rho}\right)},$$

où l'on prend comme détermination du logarithme celle qui s'annule pour $x = 0$, et comme détermination du radical celle qui se réduit alors à $+1$.

Cette intégrale est holomorphe à l'origine, car le point $x = 0$ n'est un point critique ni pour le logarithme ni pour le radical. Donc le développement (5) est convergent pour $|x|$ suffisamment petit, et il en est de même du développement (2).

**150.** Nous pouvons maintenant énoncer le théorème général d'existence des intégrales de l'équation (1) :

THÉORÈME I. — *L'équation*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

*où la fonction $f(x, y)$ est holomorphe au voisinage des valeurs $(x_0, y_0)$, admet une solution et une seule qui soit holomorphe au voisinage du point $x_0$ et prenne en ce point la valeur $y_0$.*

Ce théorème est un cas particulier du théorème suivant, qui se démontre encore par la méthode des fonctions majorantes :

THÉORÈME II. — *Le système d'équations différentielles*

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots y_n) \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

*où les $f_i$ sont des fonctions holomorphes au voisinage des valeurs $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$, admet un seul système de solutions qui soient holomorphes dans le domaine du point $x_0$, et prennent respectivement en ce point les valeurs $y_1^0, \dots y_n^0$.*

L'intégration de l'équation différentielle d'ordre $n$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

étant équivalente à celle du système

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \qquad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \dots, \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \qquad \frac{dy_{n-1}}{dx} = F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}),$$

le théorème II fournit immédiatement l'énoncé suivant :

THÉORÈME III. — *L'équation différentielle d'ordre $n$*

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),$$

*où F est une fonction holomorphe au voisinage du système de valeurs $x_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)}$, admet une intégrale et une seule, holomorphe dans le domaine du point $x_0$ et prenant en ce point la valeur $y_0$, ses $n-1$ premières dérivées prenant respectivement au même point les valeurs $y_0', \dots y_0^{(n-1)}$.*

Ces théorèmes sont généralement désignés sous le nom de théorèmes de CAUCHY.

REMARQUE. — On peut se demander si, outre les intégrales holomorphes dont les théorèmes de Cauchy établissent l'existence, il ne pourrait pas y avoir d'autres intégrales, nécessairement non holomorphes, satisfaisant aux mêmes conditions aux limites.

Considérons, par exemple, l'équation différentielle

$$y' - f(x, y) = 0,$$

où le premier membre est une fonction holomorphe de ses arguments au voisinage du *point* $(x_0, y_0, y_0')$ et nulle en ce point. Le théorème de Cauchy

établit l'existence d'une seule intégrale $y(x)$ *holomorphe* au voisinage du point $x_0$ et prenant en ce point la valeur $y_0$; mais la démonstration que nous en avons donnée n'exclut pas directement l'existence d'autres intégrales, *non holomorphes* au voisinage du point $x_0$ et prenant en ce point la valeur $y_0$.

On a établi par diverses méthodes l'impossibilité de l'existence de ces intégrales non holomorphes. Citons en particulier la *méthode des approximations successives*, que M. Picard a appliquée systématiquement avec le plus grand succès à l'étude générale des théorèmes d'existence [1].

Notons enfin qu'on peut se proposer l'étude des théorèmes d'existence avec des conditions aux limites différentes des conditions choisies par Cauchy. C'est ainsi que M. Picard a étudié, relativement à certaines équations différentielles du second ordre, l'existence de courbes intégrales assujetties à passer par *deux* points donnés, problème qui présente une importance capitale pour le calcul des variations.

## § II. — Prolongement analytique et points singuliers des intégrales.

**151.** Les théorèmes précédents nous apprennent que, sous certaines conditions, une équation différentielle du premier ordre admet une intégrale et une seule, holomorphe dans le domaine du point $x_0$, et prenant en ce point la valeur $y_0$.

La méthode des coefficients indéterminés permet, au moins théoriquement, de former le développement taylorien de cette intégrale au voisinage de $x_0$, et nous savons *a priori* que le développement sera valable dans un cercle de centre $x_0$ et de rayon non nul. En employant la méthode du prolongement analytique, nous pourrons arriver à déterminer la valeur de cette intégrale particulière dans tout son domaine d'existence.

Soit $x_1$ un point extérieur au cercle de convergence. En joignant le point $x_0$ au point $x_1$ par un chemin L, on suivra le prolongement de la première série obtenue tout le long de ce chemin; mais pour arriver de cette façon à déterminer la valeur de l'intégrale au point $x_1$, il faut être certain que le chemin L ne passe par aucun point critique de l'intégrale considérée. De là l'intérêt qui s'attache à la détermination des points singuliers des intégrales d'une équation différentielle.

La question se complique du fait qu'en général ces points singuliers ne sont pas *fixes*, c'est-à-dire varient quand on passe d'une intégrale à une autre. Considérons par exemple l'équation

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0.$$

L'intégrale qui prend la valeur $a$ pour $x = 0$ est

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

[1] Cf. n° 255.

la détermination du radical étant convenablement choisie; cette intégrale admet les points critiques $x = +a$ et $x = -a$, qui varient avec la constante arbitraire $a$.

On est donc conduit à classer en deux catégories les points singuliers des intégrales d'une équation différentielle :

1° les points singuliers *fixes*, qui ne dépendent pas des valeurs initiales choisies;

2° les points singuliers *mobiles*, qui dépendent de ces valeurs initiales.

Une équation différentielle peut avoir des points singuliers des deux espèces; par exemple l'intégrale de l'équation

$$2xy\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

qui prend la valeur $y_0$ pour $x = 1$, s'écrit

$$y = \sqrt{y_0^2 - \operatorname{Log} x}.$$

Toutes les intégrales ont un point singulier fixe, l'origine, et un point singulier mobile, le point $e^{y_0^2}$.

**152.** Nous allons maintenant établir une propriété capitale des équations linéaires, à savoir que ces équations n'admettent que des points singuliers fixes.

Considérons l'équation

$$(6) \qquad \frac{dy}{dx} = A(x)y + B(x),$$

et supposons que les fonctions $A(x)$ et $B(x)$ soient holomorphes au voisinage du point $x_0$. Quelle que soit la constante $y_0$, il résulte du théorème I que l'équation (6) admet une intégrale et une seule holomorphe au voisinage du point $x_0$, et prenant en ce point la valeur $y_0$. Prenons pour simplifier $x_0 = y_0 = 0$, et soit $\rho$ le rayon du plus petit des cercles de convergence des développements tayloriens de $A(x)$ et $B(x)$ au voisinage de l'origine. On pourra trouver une fonction $\dfrac{M}{1-\dfrac{x}{\rho}}$ majorante à la fois pour $A(x)$ et $B(x)$; la fonction $\dfrac{M(y+1)}{1-\dfrac{x}{\rho}}$ sera alors une fonction majorante pour $A(x)y + B(x)$.

L'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{1-\dfrac{x}{\rho}}(y+1)$$

admet l'intégrale

$$y = -1 + \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{-M\rho},$$

qui s'annule à l'origine si l'on prend pour $\left(1-\dfrac{x}{\rho}\right)^{-M\rho}$ la détermination égale

à $+1$ pour $x=0$. Cette détermination étant une fonction holomorphe dans le cercle de centre O et de rayon $\rho$, il suffit de reprendre le raisonnement du n° 149 pour s'assurer que l'intégrale de l'équation (6) satisfaisant aux mêmes conditions initiales sera holomorphe dans un cercle de rayon au moins égal à $\rho$.

Nous avons donc déjà le résultat suivant. Les fonctions $A(x)$ et $B(x)$ étant supposées holomorphes au voisinage du point $x_0$, et $\rho$ désignant le rayon du plus petit des deux cercles de convergence correspondants, une intégrale quelconque $y(x)$ de l'équation (6) est holomorphe dans un cercle de centre $x_0$ et de rayon $\rho$.

**153.** Prenons alors un chemin fini L, joignant $x_0$ à un point arbitraire $x_1$ du plan, et assujetti seulement à ne passer par aucun point singulier de A ou B. Si nous démontrons que le prolongement de $y(x)$ est possible le long de L de $x_0$ en $x_1$, nous aurons établi que $y(x)$ ne peut admettre d'autres points singuliers que ceux de A ou B.

Désignons par $2d$ la borne inférieure des distances des points singuliers de A ou B au chemin L, puis marquons sur L, à partir de $x_0$, une suite de points $\alpha_0=x_0$, $\alpha_1$, ... $\alpha_n$, formant une ligne polygonale de côté $d$, tous les points du dernier arc $\alpha_n x_1$ étant à une distance de $\alpha_n$ inférieure à $d$. Soient $l$ la longueur de L, $p$ le plus petit entier tel que $pd \geqslant l$. Comme on a évidemment $nd \leqslant l$, on aura $n \leqslant p$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que si $x_1$ est confondu avec $\alpha_n$ et le chemin L avec la ligne polygonale.

De chacun des points $\alpha_i$ comme centre, décrivons une circonférence $(\alpha_i)$ de rayon $\frac{3d}{2}$; deux circonférences consécutives auront évidemment une partie commune et des parties non communes. D'ailleurs (n° 152) toute circonférence $(\alpha_i)$ est intérieure au plus petit des deux cercles de convergence de A et B au point $\alpha_i$. Enfin tout point $\alpha_i$ est intérieur à la fois aux cercles $(\alpha_{i-1})$ et $(\alpha_{i+1})$.

Ceci posé, appelons $S_0$ le développement de $y(x)$ dans $(\alpha_0)$ suivant les puissances de $x-\alpha_0$; on en déduit pour $y(x)$ au point $\alpha_1$ un développement suivant les puissances de $x-\alpha_1$ : soit $S_1$ ce développement, $y_1$ son premier terme. Le développement $S_1$ représente l'intégrale qui prend au point $\alpha_1$ la valeur $y_1$; il est donc convergent dans le cercle $(\alpha_1)$ et fait connaître le prolongement de $y(x)$ dans la partie de $(\alpha_1)$ extérieure à $(\alpha_0)$ : le point $\alpha_2$ étant dans cette partie extérieure, soit $S_2$ le développement obtenu pour $y(x)$ suivant les puissances de $x-\alpha_2$. En continuant toujours de la même façon, on arrivera nécessairement, après $p$ opérations au plus, à un développement valable dans le domaine du point $x_1$, et l'on aura bien prolongé $y(x)$ tout le long de L.

Le raisonnement s'étend sans difficulté à un système d'équations linéaires du premier ordre, puis, par un procédé connu, à une équation linéaire d'ordre $n$. Nous pouvons donc énoncer le théorème général suivant :

*Une équation linéaire d'ordre quelconque n'admet que des points singuliers fixes, ceux de ses coefficients.*

REMARQUE. — Nous avons vu qu'étant donnée une équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

il existait une intégrale et une seule, holomorphe dans le voisinage du point $x_0$ et prenant en ce point la valeur $y_0$, pourvu que $f(x, y)$ soit holomorphe au voisinage du point $(x_0, y_0)$. Nous allons examiner un exemple simple où cette dernière condition n'est pas remplie, et voir ce que devient dans ce cas le théorème d'existence.

Supposons que $f(x, y)$ soit infini pour les valeurs $x_0$ et $y_0$, de telle façon que l'inverse $f_1(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$ soit holomorphe au voisinage de ces valeurs; on aura alors évidemment

$$f_1(x_0, y_0) = 0.$$

Nous pouvons écrire l'équation proposée sous la forme

$$\frac{dx}{dy} = f_1(x, y).$$

Alors le second membre étant holomorphe au voisinage du point $(x_0, y_0)$, il existe une fonction $x(y)$ et une seule, holomorphe au voisinage du point $y_0$ et prenant en ce point la valeur $x_0$. Puisque $\left(\frac{dx}{dy}\right)_0 = 0$, on aura, pour le développement taylorien,

$$x - x_0 = A_m(y - y_0)^m + A_{m+1}(y - y_0)^{m+1} + \ldots \qquad (m \geqslant 2,\ A_m \neq 0).$$

On en déduit (n° 148)

$$y - y_0 = a_1(x - x_0)^{\frac{1}{m}} + a_2(x - x_0)^{\frac{2}{m}} + \ldots \qquad (a_1 \neq 0).$$

Il en résulte immédiatement que l'équation proposée admet encore une intégrale et une seule tendant vers $y_0$ quand $x$ tend vers $x_0$, mais *cette intégrale n'est plus holomorphe au voisinage de $x_0$* : on voit en effet qu'elle admet le point $x_0$ comme point critique algébrique.

## § III. — **Étude des intégrales au voisinage d'un point exceptionnel. Intégrales singulières.**

**154.** Considérons l'équation différentielle

$$(7) \qquad F(x, y, y') = 0,$$

où le premier membre est un polynome en $x$, $y$, $y'$, supposé indécomposable et de degré $m > 1$ en $y'$. Donnons à $x$ et $y$ des valeurs particulières $x_0$, $y_0$, et supposons que l'équation en $y'$

$$(8) \qquad F(x_0, y_0, y') = 0$$

ait $m$ racines *distinctes et finies* $(y'_1, y'_2, \ldots y'_m)$. On aura alors, par exemple,

$$\left[\frac{\partial F(x_0, y_0, y')}{\partial y'}\right]_{y'=y'_1} \neq 0,$$

puisque $y'_1$ est racine simple de l'équation (8). D'après ce que nous avons vu précédemment (n° **148**, Remarque), l'équation (7) définit une fonction et une seule,

$$(9) \qquad y' = \varphi(x, y),$$

holomorphe au voisinage du point $(x_0, y_0)$, et prenant en ce point la valeur $y'_1$. L'équation (9), considérée maintenant comme une équation différentielle, admet une intégrale et une seule holomorphe au voisinage du point $x_0$ et prenant en ce point la valeur $y_0$.

En résumé, si l'équation (8), considérée comme une équation algébrique en $y'$, a $m$ racines finies et distinctes, l'équation différentielle (7) admet $m$ intégrales et $m$ seulement holomorphes dans le domaine du point $x_0$ et prenant en ce point la valeur $y_0$.

En langage géométrique, on peut dire que par le point $M_0(x_0, y_0)$ du plan passent $m$ courbes intégrales à tangentes distinctes, sur chacune desquelles le point $M_0$ est un point ordinaire. Cette représentation géométrique permet de voir immédiatement que si l'équation (8) a une racine infinie, l'une des courbes intégrales est tangente en $M_0$ à la droite $x = x_0$, rien n'étant modifié par ailleurs.

Les raisonnements précédents ne s'appliquent plus si l'équation (8) a des racines multiples. Soient $y'_1$ une telle racine, $y' = \varphi(x, y)$ une fonction satisfaisant à (7) et prenant la valeur $y'_1$ au point $(x_0, y_0)$ ; on ne peut plus affirmer que la fonction $\varphi(x, y)$ soit holomorphe au voisinage du point $(x_0, y_0)$, ni par suite appliquer le théorème de CAUCHY à l'équation différentielle correspondante.

Les points $(x, y)$ pour lesquels l'équation (7) a une racine multiple en $y'$ satisfont à l'équation

$$(10) \qquad \Phi(x, y) = 0,$$

obtenue en éliminant $y'$ entre les équations

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Soit $(\gamma)$ la courbe définie par l'équation (10), $(x_0, y_0)$ un point quelconque de $(\gamma)$. Le théorème de CAUCHY ne donnant plus aucun renseignement sur les courbes intégrales qui passent au point $(x_0, y_0)$, une étude directe de ces courbes sera nécessaire au voisinage du point $(x_0, y_0)$.

**155.** Nous nous bornerons, pour simplifier, à l'étude de l'équation différentielle

$$(11) \qquad y'^2 - 2P(x, y)y' + Q(x, y) = 0;$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles des variables $x$ et $y$. La courbe $(\gamma)$ a ici pour équation

$$P^2 - Q = 0. \tag{12}$$

Soit $(x_0, y_0)$ un point de cette courbe : nous nous proposons d'étudier, au voisinage du point $(x_0, y_0)$, les courbes intégrales de l'équation (11) qui passent en ce point. Nous supposerons *essentiellement* que ce point est un point simple de $(\gamma)$, et que les fonctions P et Q sont holomorphes dans son voisinage.

Le coefficient angulaire de la tangente au point $(x_0, y_0)$ à une courbe intégrale passant en ce point est égal à $P(x_0, y_0)$. Celui de la tangente à $(\gamma)$ au même point est égal à

$$-\frac{2\left(P\frac{\partial P}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_0}{2\left(P\frac{\partial P}{\partial y}\right)_0 - \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_0},$$

l'indice zéro indiquant qu'on a remplacé $x$ et $y$ par $x_0$ et $y_0$.

On obtiendra les points de $(\gamma)$ où ces coefficients angulaires sont égaux en résolvant le système à deux inconnues

$$P^2 - Q = 0, \qquad P\left(2P\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + 2P\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \tag{13}$$

système qui n'a, en général, qu'un nombre limité de solutions.

Si le système (13) se réduit à une seule équation, il en résulte que la courbe $(\gamma)$ satisfait à l'équation (11) : on dit qu'elle définit l'*intégrale singulière* de cette équation. Ce cas étant évidemment exceptionnel, on voit que l'équation (11) n'aura pas en général d'intégrale singulière ([1]).

Cette observation s'applique bien entendu à une équation différentielle de forme quelconque.

**156.** Plaçons-nous donc d'abord dans le cas général où il n'y a pas d'intégrale singulière. Nous supposerons que le point $(x_0, y_0)$ ne fait pas partie des points, en nombre limité, qui satisfont au système (13).

On peut toujours, au moyen d'un changement d'axes convenable, transporter l'origine au point $(x_0, y_0)$ et supposer que l'axe des $y$ n'est pas tangent à $(\gamma)$ à l'origine. Pour ne pas compliquer inutilement l'écriture, nous admettrons que, le changement d'axes étant effectué, l'équation différentielle proposée a précisément l'expression (11). La courbe $(\gamma)$, définie par l'équation (12), passe donc par l'origine, qui est un point simple où la tangente est distincte de $Oy$.

---

([1]) Si la courbe $(\gamma)$ se décompose, on raisonnera de la même façon en remplaçant successivement la première équation (13) par chacune des équations obtenues en égalant à zéro les diviseurs de $P^2 - Q$.

Les fonctions P et Q étant, par hypothèse, holomorphes au voisinage de l'origine, l'équation (12) se présente sous la forme

$$\alpha_0 x + \beta_0 y + \alpha_1 x^2 + \ldots = 0,$$

où l'on a

$$\beta_0 = 2\left(P\frac{\partial P}{\partial y}\right)_0 - \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_0.$$

D'ailleurs la courbe $(\gamma)$ n'étant pas tangente à l'axe des $y$ à l'origine, on a

$$2\left(P\frac{\partial P}{\partial y}\right)_0 - \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_0 \neq 0.$$

Donc $\beta_0$ n'est pas nul, et par suite (n° 148, Remarque) l'équation (12) définit une fonction $y_1(x)$ et une seule, holomorphe au voisinage de l'origine, et nulle en ce point.

Faisons dans l'équation (11) le changement de variable

$$y = y_1 + z.$$

Elle devient

$$(14) \qquad y_1' + z' = P(x, y_1 + z) \pm \sqrt{P^2(x, y_1 + z) - Q(x, y_1 + z)}.$$

Pour $z = 0$, on a identiquement

$$P^2(x, y_1 + z) - Q(x, y_1 + z) = 0;$$

on peut donc poser

$$P^2(x, y_1 + z) - Q(x, y_1 + z) \equiv z\Psi(x, z),$$

$\Psi(x, z)$ étant une série entière en $x$ et $z$. Ordonnons cette série suivant les puissances croissantes de $z$; il viendra

$$\Psi(x, z) \equiv \psi_0(x) + z\psi_1(x) + \ldots,$$

les $\psi_i$ désignant des fonctions holomorphes de $x$ au voisinage de l'origine. D'après les hypothèses faites sur $(\gamma)$, le développement, suivant les puissances de $x$ et $y$, de $P^2 - Q$ doit contenir un terme en $y$, $\beta_0 y$, à coefficient non nul; donc le développement de $z\Psi(x, z)$ doit contenir un terme en $z$ à coefficient non nul, et par suite on a

$$\psi_0(0) \neq 0.$$

Remplaçons maintenant $y$ par $y_1 + z$ dans la fonction $P(x, y) - y_1'$, et développons suivant les puissances croissantes de $z$; on aura

$$P(x, y_1 + z) - y_1' = \varphi_0(x) + z\varphi_1(x) + \ldots.$$

Par hypothèse, $y_1'(0)$ est différent de P (0, 0); par suite

$$\varphi_0(0) \neq 0.$$

Finalement, on voit que l'équation (14) s'écrit

$$(15) \qquad z' = \varphi_0(x) + z\varphi_1(x) + \ldots \pm \sqrt{z}\sqrt{\psi_0(x) + z\psi_1(x) + \ldots}.$$

Faisons encore le changement de variable $z = u^2$. L'équation (15) se décomposera en deux équations

$$(16) \qquad 2u\frac{du}{dx} = \varphi_0(x) + u^2\varphi_1(x) + \ldots + u\sqrt{\psi_0(x) + u^2\psi_1(x) + \ldots},$$

$$(16)' \qquad 2u\frac{du}{dx} = \varphi_0(x) + u^2\varphi_1(x) + \ldots - u\sqrt{\psi_0(x) + u^2\psi_1(x) + \ldots}.$$

Or on passe de l'équation (16) à l'équation (16)' en changeant $u$ en $-u$, ce qui ne change pas $z$. On peut donc se borner à étudier l'équation (16).

**157.** Le second membre est holomorphe dans le voisinage du point $x = 0$, $u = 0$, puisque $\psi_0(0) \neq 0$. De plus, puisque $\varphi_0(0) \neq 0$, $\frac{du}{dx}$ est infini à l'origine; nous sommes donc dans les conditions d'application de la remarque du n° 153; l'équation (16) admet une intégrale et une seule, $u(x)$, tendant vers zéro avec $x$, et l'origine est un point critique algébrique pour cette intégrale.

Posons
$$\varphi_0(0) = a_0, \qquad \sqrt{\psi_0(0)} = b_0,$$
et développons, suivant les puissances de $u$ et $x$, le second membre de l'équation (16). Le terme constant sera $a_0$ et le terme en $u$, $b_0u$; l'équation pourra donc se mettre sous la forme

$$\frac{dx}{du} = \frac{2u}{a_0 + b_0u + \ldots},$$

le second membre étant holomorphe au voisinage de l'origine. En employant la méthode des coefficients indéterminés, on trouve, pour l'intégrale de cette équation qui s'annule pour $u = 0$, le développement

$$x = \frac{u^2}{a_0} - \frac{2b_0}{3a_0^2}u^3 + \ldots;$$

on en tire (n° 148)

$$u = \sqrt{a_0}\,x^{\frac{1}{2}} + \frac{b_0}{3}x + \alpha x^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$

puis
$$u^2 = a_0x + \frac{2b_0\sqrt{a_0}}{3}x^{\frac{3}{2}} + \ldots.$$

Si maintenant, dans la relation

$$y = y_1 + z = y_1 + u^2,$$

on remplace $y_1$ par son développement suivant les puissances de $x$, on aura finalement

$$y = \lambda x + \frac{2b_0\sqrt{a_0}}{3}x^{\frac{3}{2}} + \ldots.$$

Le coefficient du terme en $x^{\frac{3}{2}}$ n'étant pas nul, on en conclut que l'origine est un point de rebroussement pour la courbe intégrale qui passe en ce point. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

*La courbe* ($\gamma$) *est en général un lieu de points de rebroussement des courbes intégrales.*

Ainsi, tandis que par tout point extérieur à ($\gamma$) passent *deux* courbes intégrales de l'équation (11) à tangentes distinctes, par un point de ($\gamma$) passe en général *une seule* courbe intégrale, qui a un rebroussement en ce point.

**158.** Il nous reste à étudier le cas où la courbe ($\gamma$) est une intégrale singulière. Il n'y a rien à modifier aux raisonnements du n° 156, sauf que, cette fois, on a, par hypothèse,

$$\varphi_0(x) \equiv 0,$$

puisque

$$y_1' \equiv P(x, y_1).$$

Alors l'équation (16) admet la solution $u = 0$, qui exprime précisément que la courbe ($\gamma$) est une intégrale de l'équation (11). Cette solution supprimée, il reste l'équation

$$2u' = u[\varphi_1(x) + u^2\varphi_2(x) + \ldots] + \sqrt{\psi_0(x) + u^2\psi_1(x) + \ldots},$$

à laquelle on peut appliquer le théorème de Cauchy, puisque le second membre est holomorphe aux environs du point $u = 0$, $x = 0$. Il passe donc par l'origine une seconde courbe intégrale, et comme $y'$ a une valeur unique en ce point par hypothèse, cette courbe intégrale est tangente à ($\gamma$). Ainsi *lorsque la courbe* ($\gamma$) *est une intégrale singulière, elle est une enveloppe de courbes intégrales.*

Remarque. — Reprenons l'équation différentielle

$$y'^2 - 2P(x, y)y' + Q(x, y) = 0.$$

Nous venons d'étudier la forme des courbes intégrales au voisinage d'un point ($x_0$, $y_0$) de la courbe ($\gamma$) définie par l'équation

$$P^2 - Q = 0,$$

en supposant *essentiellement* que le point ($x_0$, $y_0$) était un point simple de ($\gamma$) : s'il n'en est pas ainsi, les conclusions précédentes ne s'appliquent plus.

Supposons en particulier que, l'équation $P^2 - Q = 0$ étant mise sous forme entière, son premier membre admette un diviseur tel que $[\theta(x, y)]^n$, $\theta$ désignant un polynome indécomposable en $x$ et $y$ et $n$ un entier au moins égal à 2. Tout point de la courbe ($\gamma_1$) définie par l'équation $\theta(x, y) = 0$ est un point multiple de la courbe ($\gamma$) : on ne pourra donc plus affirmer que la courbe ($\gamma_1$) est ou bien une enveloppe de courbes intégrales, ou bien un lieu de points de rebroussement.

Considérons par exemple l'équation

$$y'^2 - \frac{2}{(x-y)^2 - 1}y' + 1 = 0;$$

l'équation $P^2 - Q = 0$ mise sous forme entière s'écrit ici

$$1 - [(x-y)^2 - 1]^2 \equiv (x-y)^2(y - x - \sqrt{2})(x - y - \sqrt{2}) = 0,$$

et son premier membre contient le facteur $(x-y)^2$. La droite $y-x=0$ n'est *ni une enveloppe ni un lieu de points singuliers de courbes intégrales.* En effet l'intégrale générale

$$(x-a)^2+(y-a)^2-1=0$$

représente une famille de cercles de rayon 1 ayant leurs centres sur la droite $y-x=0$; les droites

$$y-x-\sqrt{2}=0, \qquad x-y-\sqrt{2}=0$$

sont les enveloppes de cette famille de cercles, et en chaque point de la droite $y-x=0$ passent évidemment deux cercles non infiniment voisins qui se touchent en ce point.

Il est clair que chaque fois qu'il existera une courbe en chaque point de laquelle se touchent deux courbes intégrales non infiniment voisines, cette courbe fera partie des courbes définies par l'équation $P^2-Q=0$.

**159. Résumé et règle pratique.** — Étant donnée l'équation différentielle

$$y'^2-2P(x, y)y'+Q(x, y)=0,$$

l'équation $P^2-Q=0$ représente une ou plusieurs courbes qui sont :

soit un lieu de points de rebroussement des courbes intégrales (cas général);

soit un lieu de points où se touchent deux courbes intégrales non infiniment voisines;

soit enfin une enveloppe de courbes intégrales (intégrale singulière).

Pour savoir dans quel cas on se trouve, on met sous forme entière l'équation $P^2-Q=0$. Les facteurs multiples du premier membre, égalés à zéro, donneront des courbes qui pourront n'être ni des courbes intégrales singulières, ni des lieux de points singuliers des courbes intégrales(1). Ces facteurs étant écartés, l'équation $P^2-Q=0$ fournira une ou plusieurs équations

$$\varphi_1(x, y)=0, \qquad \varphi_2(x, y)=0, \quad \dots$$

les $\varphi$ désignant des polynomes indécomposables en $x$ et $y$. Si la courbe $\varphi_i=0$ satisfait à l'équation différentielle, c'est une intégrale singulière; sinon, c'est un lieu de points de rebroussement.

On démontre que les résultats précédents s'appliquent à toute équation différentielle $F(x, y, y')=0$, où le premier membre est une fonction *algébrique* quelconque des variables $x$, $y$, $y'$. L'élimination de $y'$ entre les équations

$$F(x, y, y')=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

conduit à une ou plusieurs courbes $(\gamma)$ qui représentent soit un lieu de points

(1) On pourra cependant vérifier que celles de ces courbes qui correspondent à des facteurs multiples d'ordre *impair* et ne sont pas des intégrales singulières sont encore des lieux de points de rebroussement.

de rebroussement des courbes intégrales, soit un lieu de points où se touchent deux courbes intégrales non infiniment voisines, soit enfin une intégrale singulière.

Dans ce dernier cas, la courbe ($\gamma$) satisfait à l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x}+y'\frac{\partial F}{\partial y}+y''\frac{\partial F}{\partial y'}=0,$$

qu'on déduit de $F=0$ par dérivation; or elle satisfait déjà à l'équation $\frac{\partial F}{\partial y'}=0$, donc l'intégrale singulière satisfait aux trois équations

$$F=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}+y'\frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

En appliquant cette remarque à l'équation de LAGRANGE,

$$y=x\varphi(y')+\psi(y'),$$

on voit que, si cette équation ne se réduit pas à une équation de CLAIRAUT, son intégrale singulière se compose nécessairement de droites.

APPLICATION. — *Déterminer la constante m de façon que l'équation*

$$\text{(E)} \qquad x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-3x)\frac{dy}{dx}+my=0$$

*admette une intégrale singulière, et intégrer l'équation différentielle ainsi obtenue. Indiquer la forme des courbes intégrales passant par un point donné du plan, suivant la position de ce point dans le plan.*

(*Paris, épreuve écrite,* 1[re] *question.*)

Nous nous bornons ici à l'étude des courbes intégrales réelles.

Les courbes intégrales singulières, si elles existent, satisfont d'une part à l'équation $P^2-Q=0$, qui s'écrit ici

$$y^2-2xy(2m+3)+9x^2=0$$

et représente deux droites passant par l'origine, d'autre part à l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x}+y'\frac{\partial F}{\partial y}=0,$$

c'est-à-dire

$$y'(2y'+m-3)=0;$$

pour que cette équation soit vérifiée par une des deux droites précédentes, il faut et il suffit que $m=+1$.

L'équation (E) s'écrit alors

$$\text{(17)} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{3x-y\pm\sqrt{(y-x)(y-9x)}}{2x}.$$

On voit que dans ce cas la courbe ($\gamma$) se décompose en deux droites,

$$y=x, \qquad y=9x,$$

dont la première est une intégrale singulière, la seconde un lieu de points de rebroussement.

Faisons dans l'équation (17) le changement de variable

$$y-9x=u^2(y-x);$$

elle s'écrit, après quelques simplifications et compte tenu de l'indétermination du signe de $u$,

$$\text{(18)} \qquad 4ux\frac{du}{dx}=(u^2-1)(u+3).$$

Puisque nous ne nous occupons que des courbes intégrales réelles, nous n'étudierons que les régions du plan pour lesquelles on a soit $\frac{y}{x} < 1$, soit $\frac{y}{x} > 9$. On obtiendra ces régions en faisant varier $u$ de $-\infty$ à $+\infty$.

L'équation (18) s'intègre sans difficulté et donne

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} & x = \pm A\frac{u+1}{u+3}\sqrt{\left|\frac{u-1}{u+3}\right|}, \\ & \text{d'où} \\ & y = \pm A\frac{u-3}{u+3}\sqrt{\left|\frac{u+3}{u-1}\right|}. \end{aligned}\right.$$

Supposons d'abord $u < -3$ ou $u > 1$. On peut alors poser

$$\frac{u-1}{u+3} = v^2,$$

et les équations (19) s'écrivent, compte tenu de l'indétermination du signe de $v$,

$$(20)\qquad x = \frac{A}{2}.v(1+v^2), \qquad y = \frac{A}{2}\cdot\frac{3v^2-1}{v}.$$

Si $-3 < u < 1$, on peut poser $\frac{u-1}{u+3} = -v^2$, et les équations (19) s'écrivent cette fois

$$(21)\qquad x = \frac{A}{2}.v(1-v^2), \qquad y = \frac{A}{2}\cdot\frac{3v^2+1}{v}.$$

Il existe donc deux familles distinctes de courbes intégrales réelles, définies par les équations (20) et (21), et les courbes de chaque famille se déduisent par homothétie de l'une quelconque d'entre elles. Toutes ces courbes sont des quartiques unicursales.

On verra sans peine que les courbes de la première famille ne présentent aucun rebroussement, et ont pour enveloppe l'intégrale singulière $y = x$.

Chaque courbe de la seconde famille a deux points de rebroussement, symétriques par rapport à l'origine, sur la droite $y = 9x$.

On pourra, par exemple, pour appliquer la méthode générale exposée précédemment, chercher la forme d'une courbe intégrale au voisinage du point $x = 1, y = 9$ ; on trouvera

$$x = 1 - \frac{t^2}{12} - \frac{\sqrt{2}}{216}t^3 + \dots,$$
$$y = 9 + \frac{t^2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{24}t^3 + \dots,$$

ce qui montre bien que ce point est un point de rebroussement.

Fig. 2.

En résumé, dans l'angle aigu AOB (ou A′OB′), il ne passe aucune courbe intégrale réelle.

Par tout point de l'angle A$Ox$ (ou A′$Ox'$) passent deux courbes (20).

Par tout point de l'angle B$Oy$ (ou B′$Oy'$) passent deux courbes (21).

Enfin par tout point de l'angle $xOy'$ (ou $x'Oy$) passent une courbe (20) et une courbe (21).

Exceptionnellement, en tout point de la droite $y = x$, il ne passe qu'une courbe (20) tangente en ce point à l'intégrale singulière; et en tout point de la droite $y = 9x$, il ne passe qu'une courbe (21) ayant un rebroussement en ce point.

## CHAPITRE III

# MÉTHODES PARTICULIÈRES D'INTÉGRATION

## § I. — Préliminaires.

**160.** Revenons d'abord rapidement sur les types simples d'équations intégrables du 1er ordre déjà rencontrés dans le cours de Mathématiques générales.

1° **Équation à variables séparées.** — Elle est de la forme

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0,$$

et son intégration se ramène à des quadratures.

2° **Équation homogène.** — Elle est de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right);$$

on l'intègre au moyen du changement de variable $y = tx$, qui donne

$$\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx} = f(t),$$

d'où

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t) - t}.$$

On obtient $x$ en fonction de $t$ par une quadrature, et on a ensuite $y$ san autre intégration.

L'équation

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$$

se ramène à l'un ou à l'autre des types précédents. En effet, si les deux droites

$$ax + by + c = 0, \qquad a'x + b'y + c' = 0$$

concourent en un point $O_1$, on prend un nouveau système d'axes parallèles aux premiers et d'origine $O_1$; les deux droites ont alors des équations de la forme

$$a_1x_1 + b_1y_1 = 0, \qquad a_1'x_1 + b_1'y_1 = 0,$$

et l'équation différentielle en $(x_1, y_1)$ est homogène.

Si les deux droites sont parallèles, on prend un nouveau système d'axes $Ox_1y_1$

tels que l'axe $Oy_1$, par exemple, soit parallèle aux deux droites, dont les équations seront alors de la forme

$$x_1 + \alpha = 0, \qquad x_1 + \beta = 0;$$

l'équation différentielle en $(x_1, y_1)$ ne contient plus la variable $y_1$, et les variables sont séparées.

3° **Équation linéaire.** — Elle est de la forme

$$\frac{dy}{dx} = X(x)y + X_1(x);$$

on l'intègre au moyen du changement de variable

$$y = ue^{\int X dx},$$

qui donne

$$\frac{dy}{dx} = Xue^{\int X dx} + u'e^{\int X dx},$$

puis

$$u'(x) = X_1 e^{-\int X dx}.$$

On a donc $u$ par une quadrature; l'intégrale générale s'écrit

$$y = e^{\int X dx} \int X_1 e^{-\int X dx} dx,$$

et l'on voit que l'intégration exige au total deux quadratures.

4° **Équation de Bernoulli.** — Elle est de la forme

$$\frac{dy}{dx} = X(x)y + X_1(x)y^n,$$

$n$ désignant une constante quelconque. On la ramène à une équation linéaire au moyen du changement de variable $y^{1-n} = z$.

5° **Équation de Clairaut.** — Elle est de la forme

$$y = xy' + \varphi(y');$$

l'intégrale générale se compose de la famille de droites

$$y = \lambda x + \varphi(\lambda),$$

et l'enveloppe de cette famille forme l'intégrale singulière.

6° **Équation de Lagrange.** — Elle est de la forme

$$y = x\varphi(y') + \theta(y');$$

pour l'intégrer, on pose $y' = p$, d'où $y'' = \frac{dp}{dx}$. En dérivant la proposée, on a alors

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \theta'(p)]\frac{dp}{dx},$$

ou encore

$$[p - \varphi(p)]\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \theta'(p).$$

On est donc ramené à une équation linéaire, d'où l'on tirera $x$ en fonction de $p$ par des quadratures; l'expression de $y$ en fonction de $p$ sera ensuite fournie par l'équation différentielle elle-même.

Rappelons en second lieu le procédé classique d'intégration des équations différentielles linéaires, d'ordre quelconque, à coefficients constants. Soit à intégrer l'équation

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

les coefficients $a$ étant constants; on cherche les solutions de la forme $e^{rx}$, et l'on est ainsi conduit à l'*équation caractéristique*

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

A toute racine simple, $\rho$, de l'équation caractéristique correspond une intégrale particulière $e^{\rho x}$; à toute racine multiple, $\rho$, d'ordre $\lambda$, correspondent $\lambda$ intégrales particulières,

$$e^{\rho x}, \qquad x e^{\rho x}, \qquad \ldots, \qquad x^{\lambda-1} e^{\rho x}.$$

L'intégration de l'équation proposée est donc ramenée, en définitive, à la résolution de l'équation caractéristique.

En ce qui concerne l'équation linéaire avec second membre, rappelons encore que son intégration se ramène à celle de l'équation sans second membre et à la détermination d'une intégrale particulière de l'équation avec second membre. Dans le cas où l'équation sans second membre est à coefficients constants, et où le second membre est de la forme $\Sigma x^\alpha e^{\beta x}$, on sait déterminer une intégrale particulière de la même forme pour l'équation avec second membre : nous ne reviendrons pas sur ce point, car nous donnerons plus loin une méthode générale ramenant à des quadratures l'intégration de l'équation avec second membre quand on a effectué celle de l'équation sans second membre, que celle-ci soit ou non à coefficients constants.

**161**. Soit

(1) $$F(x, y, y') = 0$$

une équation différentielle de forme quelconque. Sur toute courbe intégrale on aura

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial y'} dy' = 0,$$

ou

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'\right) dx + \frac{\partial F}{\partial y'} dy' = 0,$$

et par suite

(2) $$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y'} dy'}{\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Réciproquement, soit

(3) $$\theta(x, y, y') = C^{te}$$

une intégrale première du système (2), distincte de F, $x$, $y$ et $y'$ étant considérés comme des variables indépendantes. Toute courbe intégrale de l'équation (1) satisfait à (3). Si donc on élimine $y'$ entre les équations

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \theta(x, y, y') = a,$$

on obtiendra, sous la forme

$$\varphi(x, y, a) = 0,$$

où $a$ désigne une constante arbitraire, l'intégrale générale de l'équation (1).

Appliquons par exemple cette méthode à l'équation de Clairaut

$$y - xy' + f(y') = 0.$$

Le système (2) s'écrit ici

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = \frac{[x - f'(y')]\,dy'}{0}.$$

On doit donc avoir, sur toute courbe intégrale, ou bien

$$dy' = 0, \qquad \text{d'où} \qquad y' = a$$

et

$$y - ax + f(a) = 0,$$

relation qui fait connaître l'intégrale générale, ou bien

$$x - f'(y') = 0,$$

et, en éliminant $y'$ entre les équations

$$y - xy' + f(y') = 0, \qquad x - f'(y') = 0,$$

on aura l'intégrale singulière.

La méthode précédente s'étend immédiatement aux équations d'ordre quelconque. Soit

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

une équation d'ordre $n$; son intégration sera équivalente à celle du système

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{y''} = \ldots = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}dy^{(n)}}{\frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} + \ldots + y^{(n)}\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}}.$$

Si l'on a trouvé une intégrale première du système précédent autre que F, de la forme

$$\theta(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = C^{te},$$

l'élimination de $y^{(n)}$ entre les équations $F = 0$, $\theta = a$, ramènera l'intégration de l'équation proposée à celle d'une équation d'ordre inférieur. La connaissance de $n$ intégrales premières autres que F donnera par des éliminations seulement l'intégrale générale de l'équation proposée.

Notons encore, pour en finir avec les méthodes élémentaires d'intégration, que l'équation d'ordre $n$

$$F(x^{\lambda}y, x^{\lambda+1}y', \ldots, x^{\lambda+n}y^{(n)}) = 0,$$

où $\lambda$ est une constante quelconque, peut se ramener à une équation d'ordre $n-1$ au moyen du changement de variables

$$x^{\lambda}y = \mathrm{X}, \qquad x^{\lambda+1}y' = \mathrm{Y}.$$

Pour $\lambda = 0$, $\lambda = -1$, $\lambda = -n$, on obtient des cas d'abaissement habituellement rattachés à des considérations d'homogénéité.

Remarque. — Considérons l'équation

$$\mathrm{F}(y, y') = 0,$$

à laquelle se ramène immédiatement l'équation

$$\Phi(x, y') = 0.$$

Si, quand on considère $y$ et $y'$ comme les coordonnées d'un point dans un plan, l'équation

$$\mathrm{F}(y, y') = 0$$

représente une courbe unicursale, dont les équations paramétriques rationnelles sont

$$y = u(t), \qquad y' = v(t),$$

on aura

$$\frac{dy}{dx} = v(t) = u'(t)\frac{dt}{dx},$$

d'où

$$dx = \frac{u'(t)\,dt}{v(t)}.$$

Les équations

$$x = \int \frac{u'}{v}\,dt, \qquad y = u(t)$$

représentent les équations paramétriques de la courbe intégrale générale. L'intégration de l'équation proposée se ramène donc dans ce cas à l'intégration d'une fraction rationnelle(1).

## § II. — Facteur intégrant. Multiplicateur.

**162.** Rappelons rapidement la théorie du facteur intégrant.

Partons de l'équation différentielle

$$(4) \qquad \frac{dx}{\mathrm{X}(x, y)} = \frac{dy}{\mathrm{Y}(x, y)},$$

qu'on peut encore écrire

$$\mathrm{Y}dx - \mathrm{X}dy = 0.$$

Soit $\mu(x, y)$ une fonction telle que l'expression $\mu(\mathrm{Y}dx - \mathrm{X}dy)$ soit une différentielle totale exacte,

$$\mu(\mathrm{Y}dx - \mathrm{X}dy) = d\mathrm{U}(x, y);$$

$\mu$ est dit un *facteur intégrant* de l'équation (4). Il est clair que la connaissance d'un facteur intégrant ramène à des quadratures l'intégration de l'équation (4); l'intégrale générale s'écrit

$$\mathrm{U} = \mathrm{C}^{te}.$$

(1) Même conclusion pour l'équation $\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0$ si on peut exprimer $\frac{y}{x}$ et $y'$ par des fonctions rationnelles d'un paramètre.

Soit $\mu_1(x, y)$ un second facteur intégrant; on aura

$$\mu_1(Ydx - Xdy) = dV(x, y).$$

L'intégrale générale pouvant alors se mettre sous la forme $V = C^{te}$, V devra être une certaine fonction de U, $V = \varphi(U)$, et par suite on aura

$$\mu_1(Ydx - Xdy) = \varphi'(U)dU,$$

d'où
$$\frac{\mu_1}{\mu} = \varphi'(U).$$

On en conclut :

1° que $\mu$ désignant un facteur intégrant tel que

$$\mu(Ydx - Xdy) = dU(x, y),$$

tout autre facteur intégrant est de la forme $\mu\theta(U)$, $\theta$ désignant une fonction arbitraire;

2° que si l'on connaît deux facteurs intégrants distincts, $\mu$ et $\mu_1$, de l'équation (4), on a immédiatement l'intégrale générale de cette équation sous la forme

$$\frac{\mu}{\mu_1} = C^{te}.$$

Remarquons enfin que tout facteur intégrant $\mu$ doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu X) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu Y) = 0,$$

ou
$$X\frac{\partial \mu}{\partial x} + Y\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = 0,$$

qui exprime que l'expression $\mu(Ydx - Xdy)$ est une différentielle totale exacte.

**163.** Nous allons généraliser la notion de facteur intégrant, et, pour simplifier, nous raisonnerons sur trois variables $x$, $y$, $z$; cette limitation n'a d'ailleurs rien d'essentiel, on s'en apercevra sans peine.

Considérons les équations simultanées

$$(5) \qquad \frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)}.$$

L'intégrale générale de ce système,

$$u(x, y, z) = a, \qquad v(x, y, z) = b,$$

définit une famille de courbes dépendant de deux constantes arbitraires ou, comme on dit encore, une *congruence* de courbes.

On appelle intégrale première du système (5) toute fonction $F(x, y, z)$ qui garde une valeur constante sur une courbe intégrale quelconque. On doit donc avoir, sur toute courbe intégrale,

$$(6) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0;$$

autrement dit, l'équation (6) doit être une conséquence du système (5), c'est-à-dire qu'on doit avoir identiquement

$$X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}+Z\frac{\partial F}{\partial z}=0. \tag{7}$$

Réciproquement, soit $F(x, y, z)$ une intégrale de l'équation (7); sur toute courbe intégrale du système (5) on aura

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$$

et par suite

$$F=C^{te}.$$

Ainsi toute intégrale de l'équation (7) est une intégrale première du système (5). Donc la connaissance de deux intégrales distinctes, $u$ et $v$, de l'équation (7), permet d'écrire immédiatement l'intégrale générale du système (5); inversement, si l'on a obtenu l'intégrale générale du système (5) sous la forme

$$u(x, y, z)=a, \qquad v(x, y, z)=b,$$

on devra avoir

$$\begin{aligned} X\frac{\partial u}{\partial x}+Y\frac{\partial u}{\partial y}+Z\frac{\partial u}{\partial z}&=0,\\ X\frac{\partial v}{\partial x}+Y\frac{\partial v}{\partial y}+Z\frac{\partial v}{\partial z}&=0; \end{aligned} \tag{8}$$

les fonctions X, Y, Z n'étant pas toutes trois identiquement nulles, on tire des équations (7) et (8)

$$\frac{D(F, u, v)}{D(x, y, z)}=0,$$

d'où

$$F=\theta(u, v).$$

L'intégrale générale de l'équation (7) est donc une fonction arbitraire de $u$ et $v$.

En résumé, l'intégration du système (5) et celle de l'équation (7) constituent deux problèmes équivalents. On peut dire que le système (5) est *associé* à l'équation (7).

Soient $u_1(x, y, z)$, $u_2(x, y, z)$, $u_3(x, y, z)$ trois fonctions distinctes des variables $x$, $y$, $z$. En posant

$$u_1=\xi, \qquad u_2=\eta, \qquad u_3=\zeta,$$

on pourra exprimer $x$, $y$, $z$ au moyen des nouvelles variables $\xi$, $\eta$, $\zeta$ :

$$x=\theta_1(\xi, \eta, \zeta), \qquad y=\theta_2(\xi, \eta, \zeta), \qquad z=\theta_3(\xi, \eta, \zeta). \tag{9}$$

Désignons par $du$ la valeur commune des rapports qui figurent dans le système (5), et faisons dans ce système le changement de variables (9); on aura

$$d\xi=\frac{\partial\xi}{\partial x}dx+\frac{\partial\xi}{\partial y}dy+\frac{\partial\xi}{\partial z}dz=\left(X\frac{\partial\xi}{\partial x}+Y\frac{\partial\xi}{\partial y}+Z\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)du.$$

En désignant par le symbole opératoire UF le premier membre de l'équation (7), on pourra écrire

$$d\xi=U\xi.du,$$

et de même

$$d\eta=U\eta.du, \qquad d\zeta=U\zeta.du.$$

Le système transformé s'écrit donc

(10) $$\frac{d\xi}{U\xi} = \frac{d\eta}{U\eta} = \frac{d\zeta}{U\zeta};$$

il faudra bien entendu remplacer, dans les dénominateurs des rapports précédents, $x$, $y$ et $z$ par leurs valeurs (9).

Faisons maintenant dans l'équation (7) le changement de variables (9). Soit $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ l'expression de la fonction $F(x, y, z)$ au moyen des nouvelles variables; on aura

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x},$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y},$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

et par suite identiquement

(11) $$UF \equiv U\xi\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + U\eta\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + U\zeta\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta},$$

de sorte que l'équation (7) prend la forme

(12) $$U\xi\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + U\eta\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + U\zeta\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = 0.$$

On voit donc que le changement de variables (9), qui transforme l'équation (7) en l'équation (12), transforme aussi le système (5) associé à l'équation (7) en le système (10) associé à l'équation (12). On exprime ce fait en disant que l'équation (7) et le système associé (5) sont *covariants par rapport à toute transformation ponctuelle.*

**164.** Soit maintenant $\mu(x, y, z)$ une fonction telle que l'on ait identiquement

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu X) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu Y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu Z) = 0,$$

ou $$U\mu + \mu\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0.$$

On donne à une telle fonction le nom de *multiplicateur* du système (5). Le multiplicateur est donc une généralisation directe du facteur intégrant; nous allons voir qu'il possède des propriétés analogues.

Tout d'abord, si $\mu$ et $\mu_1$ sont deux multiplicateurs distincts du système (5), le rapport $\frac{\mu}{\mu_1}$ est une intégrale première. En effet, on a

$$U\mu + \mu\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0,$$
$$U\mu_1 + \mu_1\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0,$$

d'où $$\mu_1 U\mu - \mu U\mu_1 = 0,$$

ou enfin
$$U\frac{\mu}{\mu_1}=0,$$
ce qui établit notre proposition.

Il en résulte que la connaissance de trois multiplicateurs distincts donnera immédiatement l'intégrale générale du système (5).

En second lieu, soit $\mu(x, y, z)$ un multiplicateur du système (5). Je dis que $\mu\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}=\mu\Delta$ est un multiplicateur pour le système (10)

Il s'agit d'établir que la relation
$$(13)\qquad U\mu+\mu\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0$$
entraîne l'identité
$$(14)\qquad \frac{\partial}{\partial\xi}(\mu\Delta U\xi)+\frac{\partial}{\partial\eta}(\mu\Delta U\eta)+\frac{\partial}{\partial\zeta}(\mu\Delta U\zeta)\equiv 0.$$

Posons $U\xi=\alpha(\xi, \eta, \zeta)$, $\quad U\eta=\beta(\xi, \eta, \zeta)$, $\quad U\zeta=\gamma(\xi, \eta, \zeta)$, et désignons par $\bar{\mu}$ ce que devient la fonction $\mu(x, y, z)$ par le changement de variables (9). On aura alors, d'après les identités (11) et (13),
$$(15)\qquad U\mu=\alpha\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\eta}+\gamma\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\zeta}=-\mu\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$
et l'équation (14), qui s'écrit
$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\mu\Delta\alpha)+\frac{\partial}{\partial\eta}(\mu\Delta\beta)+\frac{\partial}{\partial\zeta}(\mu\Delta\gamma)=0,$$
$$\mu\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(\Delta\alpha)+\frac{\partial}{\partial\eta}(\Delta\beta)+\frac{\partial}{\partial\zeta}(\Delta\gamma)\right]+\Delta\left(\alpha\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\eta}+\gamma\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial z}\right)=0,$$
devient, après remplacement du coefficient de $\Delta$ par sa valeur (15) et division par $\mu$,
$$(16)\qquad \frac{\partial}{\partial\xi}(\Delta\alpha)+\frac{\partial}{\partial\eta}(\Delta\beta)+\frac{\partial}{\partial\zeta}(\Delta\gamma)=\Delta\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

Pour établir cette relation, observons que le changement de variables (9) peut être remplacé par trois changements de variables consécutifs, dans lesquels on conservera chaque fois deux des anciennes variables. Il suffit donc d'établir la relation (16) pour un changement de variables de la forme
$$(17)\qquad x=\theta(\xi, \eta, \zeta), \qquad y=\eta, \qquad z=\zeta,$$
où $\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\neq 0$. Supposons que l'on tire des équations (17)
$$\xi=\varphi(x, y, z).$$
On aura alors
$$\Delta=\frac{\partial\theta}{\partial\xi},$$
$$\alpha=X\frac{\partial\varphi}{\partial x}+Y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+Z\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \qquad \beta=Y, \qquad \gamma=Z.$$

Dérivons successivement par rapport à $x$, $y$ et $z$ la première équation (17).

On aura

$$1=\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad 0=\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial\eta},\qquad 0=\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\theta}{\partial\zeta},$$

d'où

$$\alpha\Delta=X-Y\frac{\partial\theta}{\partial\eta}-Z\frac{\partial\theta}{\partial\zeta},\qquad \beta\Delta=Y\frac{\partial\theta}{\partial\xi},\qquad \gamma\Delta=Z\frac{\partial\theta}{\partial\xi},$$

et par suite

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi}(\alpha\Delta)+\frac{\partial}{\partial\eta}(\beta\Delta)+\frac{\partial}{\partial\zeta}(\gamma\Delta)&=\frac{\partial X}{\partial\xi}-\frac{\partial Y}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}-\frac{\partial Z}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}+\frac{\partial Y}{\partial\eta}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+\frac{\partial Z}{\partial\zeta}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\\&=\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\left(\frac{\partial X}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial\eta}+\frac{\partial Z}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial\zeta}\right)\\&=\Delta\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right).\qquad \text{C. Q. F. D.}\end{aligned}$$

La proposition que nous venons d'établir va nous conduire aisément à la seconde propriété fondamentale du multiplicateur. Supposons que l'on connaisse une intégrale première $u(x, y, z)$ et un multiplicateur $\mu(x, y, z)$ du système (5). Soient $v(x, y, z)$ et $w(x, y, z)$ deux fonctions telles que le jacobien $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ ne soit pas identiquement nul. Le changement de variables

$$\xi=u(x, y, z),\qquad \eta=v(x, y, z),\qquad \zeta=w(x, y, z)$$

conduit du système (5) à un système

$$(18)\qquad \frac{d\xi}{\alpha(\xi, \eta, \zeta)}=\frac{d\eta}{\beta(\xi, \eta, \zeta)}=\frac{d\zeta}{\gamma(\xi, \eta, \zeta)}$$

qui doit admettre l'intégrale première $\xi=C^{te}$. On a par suite $\alpha=0$, et l'intégration du système (18) se réduit à celle de l'équation

$$(19)\qquad \frac{d\eta}{\beta(\xi, \eta, \zeta)}=\frac{d\zeta}{\gamma(\xi, \eta, \zeta)},$$

où l'on considère $\xi$ comme une constante. Or on connaît un multiplicateur du système (18), savoir

$$\mu_1=\mu\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)};$$

on aura donc

$$\frac{\partial(\alpha\mu_1)}{\partial\xi}+\frac{\partial(\beta\mu_1)}{\partial\eta}+\frac{\partial(\gamma\mu_1)}{\partial\zeta}=0,$$

ou, puisque $\alpha$ est nul,

$$\frac{\partial(\beta\mu_1)}{\partial\eta}+\frac{\partial(\gamma\mu_1)}{\partial\zeta}=0,$$

relation qui exprime que $\mu_1$ est un facteur intégrant pour l'équation (19).

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

*Quand on connaît une intégrale première et un multiplicateur du système* (5), *l'intégration de ce système est ramenée à des quadratures.*

Plus généralement considérons le système d'équations simultanées

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \dots x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, \dots x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \dots x_n)}.$$

On démontrerait d'une façon analogue que *si l'on connaît $n-2$ intégrales premières et un multiplicateur de ce système, son intégration est ramenée à des quadratures.*

Ce théorème, dû à Jacobi, est désigné généralement sous le nom de *théorème du dernier multiplicateur.*

## § III. — Équations linéaires d'ordre $n$. Système fondamental. Variation des constantes.

**165.** Considérons l'équation linéaire sans second membre

$$(20) \qquad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

où les $a_i$ sont des fonctions de $x$. Soient $y_1, y_2, \dots y_n$ $n$ intégrales particulières telles que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

On dit dans ce cas que les $n$ intégrales $y_i$ forment un *système fondamental* de l'équation (20). Nous allons démontrer que l'intégrale générale peut alors s'écrire

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

les $C_i$ désignant des constantes arbitraires.

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons $n = 2$ : on verra sans peine que le raisonnement est général.

Soient donc $y_1$ et $y_2$ deux intégrales de l'équation

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

telles que l'on ait

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Des équations

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$
$$y''_1 + a_1 y'_1 + a_2 y_1 = 0,$$
$$y''_2 + a_1 y'_2 + a_2 y_2 = 0,$$

on tire

$$\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ y''_1 & y'_1 & y_1 \\ y''_2 & y'_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0;$$

il existe donc entre les éléments des colonnes de ce déterminant une même relation linéaire et homogène,

$$\lambda_0 y + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0,$$
$$\lambda_0 y' + \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' = 0,$$
$$\lambda_0 y'' + \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2'' = 0,$$

les $\lambda$ n'étant pas tous nuls. Il est impossible que $\lambda_0$ soit nul, car les deux premières équations du groupe précédent donneraient, $\lambda_1$ et $\lambda_2$ n'étant pas tous deux nuls, $\Delta = 0$. On peut donc prendre $\lambda_0 = -1$ et écrire

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2,$$
$$y' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2',$$
$$y'' = \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2''.$$

En dérivant la première équation et tenant compte de la seconde, puis en dérivant la seconde et tenant compte de la troisième, on aura

$$\lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0, \qquad \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = 0,$$

et par suite, puisque $\Delta \neq 0$,

$$\lambda_1' = 0, \qquad \lambda_2' = 0,$$

ce qui montre que $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont des constantes. Il en résulte immédiatement que l'intégrale générale de la proposée peut se mettre sous la forme

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2,$$

$\lambda_1$ et $\lambda_2$ désignant des constantes arbitraires.

**166.** Revenons maintenant au cas général et supposons que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ forment un système fondamental de l'équation (20). Le déterminant $\Delta$ se nomme le *wronskien* des $n$ fonctions $y_i$. Nous allons établir une propriété importante du wronskien de $n$ fonctions $y_1, \ldots, y_n$, considérées indépendamment de toute équation différentielle.

On dit que $n$ fonctions $y_1, \ldots, y_n$ sont *liées linéairement* quand il existe $n$ constantes $C_1, \ldots, C_n$, *non toutes nulles*, telles qu'on ait

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0. \tag{21}$$

Le wronskien des $n$ fonctions $y_i$ est alors nul, comme on le voit en dérivant $n-1$ fois l'identité (21) et éliminant les $C_i$ entre les $n-1$ équations ainsi obtenues et l'identité (21) elle-même.

*Réciproquement*, si le wronskien des $n$ fonctions $y_i$ est identiquement nul, ces $n$ fonctions sont liées linéairement, ou, comme on dit encore, ne sont pas linéairement distinctes.

Supposons d'abord que tous les mineurs du premier ordre de $\Delta$ ne soient pas identiquement nuls; soit, par exemple,

$$\delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{n-1}' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Posons

$$(22)\quad \begin{cases} y_n = k_1 y_1 + \ldots + k_{n-1} y_{n-1}, \\ y'_n = k_1 y'_1 + \ldots + k_{n-1} y'_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(n-2)} = k_1 y_1^{(n-2)} + \ldots + k_{n-1} y_{n-1}^{(n-2)}, \end{cases}$$

les $k_i$ désignant des fonctions inconnues de $x$. Soit A une région du plan de la variable $x$ où les fonctions $y_i$ soient holomorphes et où le mineur $\delta$ ne s'annule pas. Alors si l'on résout les équations (22) par rapport aux $k_i$, les fonctions ainsi obtenues seront holomorphes dans l'aire A.

Entre les termes de chacune des $n-1$ premières lignes du déterminant $\Delta$ existe une même relation linéaire et homogène, qu'expriment les équations (22). Ce déterminant étant identiquement nul, la même relation doit exister entre les termes de sa dernière ligne : on peut en effet écrire

$$\Delta = \delta\left[y_n^{(n-1)} - k_1 y_1^{(n-1)} - k_2 y_2^{(n-1)} - \ldots - k_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}\right],$$

et, puisque $\delta \neq 0$, $\Delta = 0$, on doit bien avoir

$$(23)\qquad y_n^{(n-1)} = k_1 y_1^{(n-1)} + k_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + k_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}.$$

Dérivons les équations (22); il vient, en tenant compte des équations (22) elles-mêmes et de l'équation (23)

$$\begin{gathered} k'_1 y_1 + k'_2 y_2 + \ldots + k'_{n-1} y_{n-1} = 0, \\ k'_1 y'_1 + k'_2 y'_2 + \ldots + k'_{n-1} y'_{n-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k'_1 y_1^{(n-2)} + k'_2 y_2^{(n-2)} + \ldots + k'_{n-1} y_{n-1}^{(n-2)} = 0. \end{gathered}$$

On en tire, puisque $\delta \neq 0$,

$$k'_1 = k'_2 = \ldots = k'_{n-1} = 0.$$

Les $k_i$ sont donc des constantes, et les fonctions $y_i$ sont bien liées linéairement.

Si tous les mineurs du premier ordre sont nuls, on considérera les mineurs d'ordre supérieur; supposons que le premier mineur non nul soit d'ordre $p$; on recommencera le raisonnement précédent en remplaçant le déterminant $\Delta$ par un mineur d'ordre $p-1$ ayant pour mineur du premier ordre le mineur non nul d'ordre $p$ par rapport à $\Delta$. On arrivera donc nécessairement à une relation linéaire et homogène à coefficients constants entre un certain nombre des fonctions $y_i$.

Nous pouvons dès lors énoncer le théorème suivant :

*Pour que n fonctions d'une variable ne soient pas linéairement distinctes, il faut et il suffit que leur wronskien soit identiquement nul.*

Nous avons démontré, d'autre part, que si les $n$ intégrales particulières $y_1, \ldots, y_n$ de l'équation (20) forment un système fondamental, l'intégrale générale se met sous la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

les $C_i$ désignant des constantes arbitraires. On voit maintenant que, *réciproquement*, si l'expression ci-dessus représente l'intégrale générale de l'équation (20), les intégrales $y_1, \ldots, y_n$ forment un système fondamental. En effet si leur wronskien était nul, ces fonctions $y_i$ ne seraient pas linéairement distinctes, et par suite l'expression $\Sigma C_i y_i$, contenant en réalité un nombre de constantes arbitraires inférieur à $n$, ne pourrait pas représenter toutes les intégrales dont le théorème de Cauchy (n° 150) établit l'existence.

**167.** Considérons maintenant une équation linéaire d'ordre $n$ avec second membre. Pour simplifier l'écriture, nous prendrons encore $n=2$. Soit donc l'équation

$$y'' + y'p(x) + yq(x) = u(x), \tag{24}$$

et supposons que nous ayons déterminé l'intégrale générale de l'équation sans second membre, soit

$$y = Ay_1 + By_2, \tag{25}$$

A et B désignant deux constantes arbitraires. Nous allons montrer que l'intégration de l'équation (24) se ramène à des quadratures.

En effet, considérons A et B comme deux fonctions inconnues, à choisir de telle sorte que la relation (25) donne l'intégrale générale de l'équation (24). On aura

$$y' = Ay_1' + By_2' + y_1\frac{dA}{dx} + y_2\frac{dB}{dx},$$

ou, en posant

$$y_1\frac{dA}{dx} + y_2\frac{dB}{dx} = 0, \tag{26}$$

$$y' = Ay_1' + By_2', \tag{27}$$

et par suite

$$y'' = Ay_1'' + By_2'' + y_1'\frac{dA}{dx} + y_2'\frac{dB}{dx}. \tag{28}$$

Portons dans l'équation (24) les valeurs (25), (27) et (28) de $y$, $y'$ et $y''$; on aura, puisque $y_1$ et $y_2$ sont des solutions particulières de l'équation sans second membre,

$$y_1'\frac{dA}{dx} + y_2'\frac{dB}{dx} = u(x). \tag{29}$$

Par hypothèse, on a

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0;$$

les équations (26) et (29) donnent donc $\frac{dA}{dx}$ et $\frac{dB}{dx}$, et on en tire A et B par des quadratures.

On donne à la méthode qui vient d'être exposée le nom de *méthode de la variation des constantes*.

## § IV. — Équations de Riccati.

**168.** On donne le nom d'équations de RICCATI aux équations différentielles de la forme

$$y' + ay^2 + by + c = 0, \tag{30}$$

où $a$, $b$ et $c$ sont des fonctions données de $x$.

Si $a$ est nul, on a une équation linéaire, et une équation de BERNOULLI si $c$ est nul.

En général l'intégration de l'équation de RICCATI ne peut être ramenée à des quadratures.

Supposons que l'on connaisse une intégrale particulière $y_1$ de l'équation (30). Des équations

$$y' + ay^2 + by + c = 0,$$
$$y_1' + ay_1^2 + by_1 + c = 0,$$

on tire

$$y' - y_1' + a(y^2 - y_1^2) + b(y - y_1) = 0,$$

d'où, en posant

$$z = y - y_1,$$
$$z' + az^2 + (2ay_1 + b)z = 0. \tag{31}$$

L'intégration de l'équation (30) est ainsi ramenée à celle de l'équation (31), qui est une équation de Bernoulli. Donc quand on connaît une intégrale particulière de l'équation de RICCATI, son intégration est ramenée à *deux* quadratures.

Supposons maintenant que l'on connaisse deux intégrales particulières $y_1$ et $y_2$ de l'équation (30). Le changement de variable

$$u = \frac{1}{z}$$

ramène l'équation (31) à une équation linéaire

$$u' - (2ay_1 + b)u - a = 0.$$

D'ailleurs l'équation en $z$ admet l'intégrale particulière $y_2 - y_1$, et par suite l'équation en $u$ admet l'intégrale $\frac{1}{y_2 - y_1}$; son intégrale générale s'écrira donc

$$u = \frac{1}{y_2 - y_1} + e^{\int (2ay_1 + b)\,dx};$$

l'intégration de l'équation (30) est donc ramenée dans ce cas à *une seule* quadrature.

Enfin si l'on connaît trois intégrales particulières de l'équation (30), on aura l'intégrale générale sans quadrature. Ce point résulte immédiatement des considérations précédentes, mais nous allons le démontrer par une autre voie,

qui nous permettra en même temps d'établir un lien remarquable entre l'équation de RICCATI et l'équation linéaire du second ordre.

Faisons, dans l'équation (30), le changement de variable

$$y = \lambda(x)v + \mu(x),$$

$v$ désignant la nouvelle fonction inconnue, $\lambda$ et $\mu$ deux fonctions provisoirement indéterminées. L'équation (30) s'écrit

$$(32) \quad \lambda v' + a\lambda^2 v^2 + [\lambda' + \lambda(2a\mu + b)]v + \mu' + a\mu^2 + b\mu + c = 0.$$

Comme nous supposons que l'équation (30) n'est pas une équation linéaire, le coefficient $a$ n'est pas identiquement nul; prenons alors

$$\lambda = \frac{1}{a}, \qquad \lambda' + \lambda(2a\mu + b) = 0.$$

L'équation (32) prendra la forme

$$(33) \qquad v' + v^2 + p(x) = 0.$$

Posons enfin

$$Y = e^{\int v dx},$$

d'où
$$Y' = ve^{\int v dx}, \qquad Y'' = (v^2 + v')e^{\int v dx};$$

l'équation (33) s'écrit

$$(34) \qquad Y'' + p(x)Y = 0.$$

On a donc ramené l'intégration de l'équation de RICCATI à celle d'une équation linéaire du second ordre (1). Soit

$$Y = \alpha Y_1 + \beta Y_2$$

l'intégrale générale de l'équation (34), $\alpha$ et $\beta$ désignant deux constantes arbitraires. On aura

$$v = \frac{Y'}{Y} = \frac{\alpha Y_1' + \beta Y_2'}{\alpha Y_1 + \beta Y_2} = \frac{Y_1' + CY_2'}{Y_1 + CY_2},$$

C désignant une constante arbitraire.

Ce dernier résultat montre que $v$, et par suite $y$, est une fonction homographique de la constante d'intégration C. Soient donc $y_1$, $y_2$, $y_3$ trois intégrales particulières de l'équation (30), correspondant aux valeurs $C_1$, $C_2$, $C_3$ de la constante d'intégration. On aura, d'après les propriétés du rapport anharmonique,

$$(y, y_1, y_2, y_3) = (C, C_1, C_2, C_3) = C^{te}.$$

L'intégrale générale de l'équation (30) s'écrit donc immédiatement

$$\frac{y - y_2}{y - y_3} : \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = C^{te};$$

c'est la propriété que nous voulions établir.

(1) La réciproque est immédiate.

## § V. — Équations de Laplace.

**169.** Laplace a fait une élégante application de la théorie des fonctions d'une variable complexe à l'intégration d'une classe particulière d'équations linéaires d'ordre quelconque. Nous exposerons sa méthode sur une équation du second ordre.

Considérons l'équation différentielle

$$(35)\qquad (a_0x+b_0)\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1x+b_1)\frac{dy}{dx}+(a_2x+b_2)y=0.$$

Cherchons à satisfaire à cette équation en prenant pour $y$ une expression de la forme

$$(36)\qquad y=\int_{\mathrm{L}} e^{zx}\mathrm{Z}dz,$$

où Z désigne une fonction inconnue de la variable $z$, et L un chemin provisoirement indéterminé. On aura

$$\frac{dy}{dx}=\int_{\mathrm{L}} ze^{zx}\mathrm{Z}dz,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\int_{\mathrm{L}} z^2e^{zx}\mathrm{Z}dz;$$

posons alors

$$\mathrm{P}(z)=a_0z^2+a_1z+a_2,\qquad \mathrm{Q}(z)=b_0z^2+b_1z+b_2.$$

On voit que l'équation (35) peut s'écrire

$$(37)\qquad \int_{\mathrm{L}} e^{zx}\mathrm{Z}(\mathrm{P}x+\mathrm{Q})dz=0.$$

Nous choisirons la fonction Z de telle sorte que l'expression sous le signe $\int$ soit la différentielle de $e^{zx}\mathrm{ZP}$. On a

$$\frac{d}{dz}e^{zx}\mathrm{ZP}=e^{zx}\left[\mathrm{ZP}x+\frac{d}{dz}(\mathrm{ZP})\right];$$

nous devrons donc avoir

$$\frac{d}{dz}(\mathrm{ZP})=\mathrm{ZQ}=\mathrm{ZP}.\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}},$$

d'où

$$\mathrm{ZP}=e^{\int_{z_0}^{z}\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}dz},$$

la limite inférieure $z_0$ étant choisie de façon à ne pas annuler $\mathrm{P}(z)$. Posons alors

$$\mathrm{V}=e^{zx}\mathrm{ZP}=e^{zx+\int_{z_0}^{z}\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}dz};$$

l'équation (37) s'écrit finalement

$$|\mathrm{V}|_{\mathrm{L}}=0.$$

Ainsi la détermination d'une intégrale particulière de l'équation (35) est ramenée à la recherche d'un chemin L tel que :

1° l'intégrale (36) soit finie et non nulle;

2° la variation totale de V le long de L soit nulle.

Soit $a$ une constante quelconque; faisons dans l'équation (35) le changement de variable

$$y = e^{ax} Y;$$

on obtient, toutes réductions faites, l'équation

$$(a_0 x + b_0) Y'' + [x P'(a) + Q'(a)] Y' + [x P(a) + Q(a)] Y = 0.$$

Si les polynomes P et Q ont la racine commune $a$, l'équation en Y admet l'intégrale particulière $Y = 1$, et l'équation en $y$ l'intégrale particulière

$$y = e^{ax};$$

l'intégration de l'équation (35) est alors, comme on sait, ramenée immédiatement à des quadratures.

Nous pouvons donc supposer que les polynomes P et Q sont premiers entre eux; nous supposerons en outre, pour nous borner au cas général, que le polynome $P(z)$ est effectivement du second degré $(a_0 \neq 0)$ et a ses racines distinctes.

Soient $a$ et $b$ ces racines; on a alors

$$\frac{Q}{P} = \lambda + \frac{\alpha_1}{z-a} + \frac{\alpha_2}{z-b} \qquad (\alpha_1 \neq 0, \qquad \alpha_2 \neq 0)$$

et par suite, en choisissant convenablement $z_0$,

$$\int_{z_0}^{z} \frac{Q}{P} dz = \lambda z + \alpha_1 \log(z-a) + \alpha_2 \log(z-b).$$

On en tire d'abord

(38) $$V = e^{z(x+\lambda)} (z-a)^{\alpha_1} (z-b)^{\alpha_2};$$

d'autre part on a

$$ZP = e^{\lambda z} (z-a)^{\alpha_1} (z-b)^{\alpha_2},$$

d'où

$$Z = \frac{1}{a_0} e^{\lambda z} (z-a)^{\alpha_1 - 1} (z-b)^{\alpha_2 - 1}.$$

On aura donc finalement, en négligeant le facteur constant $a_0$,

(39) $$y = \int_L e^{z(x+\lambda)} (z-a)^{\alpha_1 - 1} (z-b)^{\alpha_2 - 1} dz.$$

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des lacets décrits dans le sens direct autour de $a$ et $b$, à partir d'un point quelconque, $\mathcal{A}_{-1}$ et $\mathcal{B}_{-1}$ les mêmes lacets décrits dans le sens rétrograde. L'intégrale (39) prise le long de $\mathcal{A}$ n'est pas nulle en général : soit A sa valeur pour une détermination initiale particulière de la fonction à intégrer. Désignons de même par B la valeur de l'intégrale (39) prise le long de $\mathcal{B}$ avec la même détermination initiale. Quand $z$ a décrit $\mathcal{A}$, la fonction V est multipliée par $e^{2\pi i \alpha_1}$; si $\alpha_1$ est un entier positif, la variation de V est nulle, mais alors le point $a$ est un point ordinaire pour la fonction à intégrer dans l'équation (39), et on obtient pour $y$ la valeur zéro. Au contraire si $\alpha_1$ est un entier négatif, la variation de V est encore nulle, mais la valeur obtenue pour $y$ ne l'est pas *en général*. Nous avons donc déjà le résultat suivant :

*Si l'un des nombres $\alpha_1$ ou $\alpha_2$ est un entier négatif, on aura en général une intégrale de l'équation proposée en prenant pour chemin* L *une petite circonférence décrite autour du pôle correspondant.*

Considérons maintenant un chemin L équivalent à la suite de lacets

$$(40) \qquad \mathcal{A}, \ \mathcal{B}, \ \mathcal{A}_{-1}, \ \mathcal{B}_{-1};$$

on voit immédiatement que la variation totale de V est nulle, puisqu'on revient au point de départ avec la valeur initiale multipliée par

$$e^{2\pi i(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_1-\alpha_2)} = 1.$$

Soient, d'autre part, $A_{-1}$ et $B_{-1}$ les valeurs de l'intégrale (39) prises le long de $\mathcal{A}_{-1}$ et $\mathcal{B}_{-1}$, toujours avec la même détermination initiale. Le long du chemin $\mathcal{A}\mathcal{A}_{-1}$ l'intégrale (39) est nulle; or quand on a décrit $\mathcal{A}$ la fonction à intégrer a été multipliée par $e^{2i\pi(\alpha_1-1)} = e^{2i\pi\alpha_1}$; on a donc

$$A + A_{-1}e^{2i\pi\alpha_1} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad A_{-1} = -Ae^{-2i\pi\alpha_1},$$

et de même

$$B_{-1} = -Be^{-2i\pi\alpha_2}.$$

L'intégrale (39), prise le long du chemin (40), a alors pour valeur

$$A + Be^{2i\pi\alpha_1} + A_{-1}e^{2i\pi(\alpha_1+\alpha_2)} + B_{-1}e^{2i\pi\alpha_2},$$

c'est-à-dire

$$A(1 - e^{2i\pi\alpha_2}) + B(e^{2i\pi\alpha_1} - 1).$$

Si un seul des nombres $\alpha_1$ ou $\alpha_2$ était entier positif, $\alpha_1$ par exemple, on aurait

$$e^{2i\pi\alpha_1} = 1 \qquad \text{et} \qquad A = 0,$$

de sorte que l'expression précédente serait nulle. Cette hypothèse écartée, l'intégrale (39) prise le long du chemin (40) fournira en général une intégrale de l'équation proposée, une exception ne pouvant se produire que si l'on avait identiquement

$$A(e^{2i\pi\alpha_2} - 1) = B(e^{2i\pi\alpha_1} - 1).$$

Lorsque le nombre $\alpha_1 + \alpha_2$ est un entier sans que $\alpha_1$ et $\alpha_2$ le soient, on peut prendre pour chemin L l'ensemble des deux lacets $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$. En effet, quand $z$ a décrit L dans le sens direct, V est multiplié par $e^{2\pi i(\alpha_1+\alpha_2)}$, c'est-à-dire qu'il revient à sa valeur initiale; d'autre part, l'intégrale (39) est égale dans ce cas à $A + e^{2\pi i\alpha_1}B$ et n'est pas nulle en général, la fonction à intégrer n'étant pas holomorphe à l'intérieur du chemin fermé L.

On peut encore former d'autres chemins susceptibles de donner des intégrales de l'équation (35). Supposons par exemple que la partie réelle de $\alpha_1$ soit positive, et posons

$$z - a = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \qquad z - b = \rho_2 e^{i\varphi_2}, \qquad z = re^{i\theta}, \qquad x + \lambda = Re^{i\omega},$$
$$\alpha_1 = \alpha + i\beta, \qquad \alpha_2 = \gamma + i\delta \qquad (\alpha > 0).$$

On aura successivement

$$(z-a)^{\alpha_1} = e^{\alpha_1 \operatorname{Log}(z-a)} = e^{(\alpha+i\beta)(\operatorname{Log}\rho_1+i\varphi_1)},$$

$$|(z-a)^{\alpha_1}| = e^{\alpha \operatorname{Log}\rho_1 - \beta\varphi_1} = \rho_1^{\alpha} e^{-\beta\varphi_1},$$

et de même

$$|(z-a)^{\alpha_1-1}| = \rho_1^{\alpha-1} e^{-\beta\varphi_1}.$$

Il en résulte que, pour $z=a$, V s'annule, et l'on voit de plus que la fonction à intégrer dans le second membre de l'équation (39) a, pour $z$ infiniment voisin de $a$, un module qui est au plus de l'ordre de $\rho_1^{\alpha-1}(\alpha-1>-1)$. Par suite si la partie réelle de $\alpha_2$ est aussi positive, on pourra prendre comme chemin L un segment de droite joignant les points $a$ et $b$ : V est nul aux deux limites, et l'intégrale (39) est en général finie et non nulle.

Enfin, la partie réelle de $\alpha_1$ étant toujours supposée positive, prenons comme chemin L une demi-droite indéfinie issue de $a$, et ne passant pas par $b$. On trouve sans difficulté, avec les notations précédentes,

$$|V| = \rho_1^{\alpha}\rho_2^{\gamma} e^{Rr\cos(\theta+\omega)-\beta\varphi_1-\gamma\varphi_2},$$

et
$$|e^{z(x+\lambda)}(z-a)^{\alpha_1-1}(z-b)^{\alpha_2-1}| = \rho_1^{\alpha-1}\rho_2^{\gamma-1} e^{Rr\cos(\theta+\omega)-\beta\varphi_1-\gamma\varphi_2};$$

d'ailleurs, quand $z$ s'éloigne indéfiniment sur L, $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ et $\frac{r}{\rho_1}$ prennent des valeurs de plus en plus voisines de 1, $\varphi_2$ et $\theta$ des valeurs de plus en plus voisines de $\varphi_1$; par suite $|V|$ est de l'ordre de

$$\rho_1^{\alpha+\gamma} e^{R\rho_1\cos(\varphi_1+\omega)-(\beta+\gamma)\varphi_1},$$

et $|e^{z(x+\lambda)}(z-a)^{\alpha_1-1}(z-b)^{\alpha_2-1}|$ de l'ordre de

$$e^{-(\beta+\gamma)\varphi_1}\rho_1^{\alpha+\gamma-2} e^{R\rho_1\cos(\varphi_1+\omega)}.$$

Si donc on a choisi L de telle sorte que

$$\cos(\varphi_1+\omega) < 0,$$

V s'annulera à l'infini, et l'intégrale qui figure dans le second membre de l'équation (39) restera finie. On aura donc ainsi, en général, une intégrale particulière de l'équation (35).

Considérons, pour donner une application de la méthode de LAPLACE, l'équation

$$xy'' + 2\mu y' + xy = 0,$$

où $\mu$ est une constante quelconque : c'est l'*équation de* BESSEL.

On a ici, avec les notations précédentes, en prenant $z_0 = 0$,

$$P = z^2+1, \qquad Q = 2\mu z,$$

$$Z = (z^2+1)^{\mu-1}, \qquad V = e^{zx}(z^2+1)^{\mu}.$$

Les deux racines de $P(z)$ sont $+i$ et $-i$; on a donc

$$\lambda = 0, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \mu, \qquad a = i, \qquad b = -i,$$

et P est évidemment premier avec Q.

Supposons d'abord que $\mu$ soit un entier négatif, $\mu = -n$; l'intégrale

$$\int \frac{e^{zx}}{(z^2+1)^{n+1}} dz$$

prise le long d'une petite circonférence de centre $i$ satisfait à l'équation de Bessel; on obtient ainsi une intégrale de la forme

$$e^{ix}[P_n(x) + iQ_n(x)],$$

$P_n$ et $Q_n$ désignant deux polynomes, l'un de degré $n$, l'autre de degré $n-1$, et il est clair que l'expression

$$e^{-ix}[P_n(x) - iQ_n(x)]$$

fournira une autre intégrale. L'intégrale générale de l'équation

$$xy'' - 2ny' + xy = 0,$$

où $n$ est un entier positif, est donc de la forme

$$y = C_1(P_n \sin x + Q_n \cos x) + C_2(P_n \cos x - Q_n \sin x).$$

Remarquons d'ailleurs que le cas où $\mu$ est un entier positif se ramène sans peine au précédent. Le changement de variable

$$y = x^{1-2\mu} Y$$

conduit en effet de l'équation proposée à l'équation

$$xY'' - 2(\mu - 1)Y' + xY = 0,$$

et si $\mu$ est un entier positif, le demi-coefficient de $Y'$ est un entier négatif (ou zéro).

Le même changement de variable montre qu'on peut toujours supposer la partie réelle de $\mu$ positive, car l'un au moins des nombres $\mu$ et $-(\mu-1)$ a sa partie réelle positive. On pourra donc, dans le cas où $\mu$ n'est pas un entier, choisir pour chemin L :

soit la suite de lacets (40);

soit le segment rectiligne $(-i, +i)$;

soit une demi-droite indéfinie, convenablement dirigée, ayant pour origine l'un des points $-i$, $+i$.

## CHAPITRE IV

## LE THÉORÈME DE FUCHS

**170.** Dans ce chapitre, consacré aux équations linéaires, nous nous bornerons, pour simplifier l'exposé, aux équations du second ordre, cette limitation n'ayant d'ailleurs rien d'essentiel.

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p_1(x)\frac{dy}{dx}+p_2(x)y=0. \tag{1}$$

La connaissance de deux intégrales particulières permet d'écrire immédiatement l'intégrale générale. Cherchons à quelles conditions l'équation (1) admettra deux intégrales particulières

$$y_1=x^{r_1}\mathrm{H}_1(x), \qquad y_2=x^{r_2}\mathrm{H}_2(x),$$

telles que $\mathrm{H}_1$ et $\mathrm{H}_2$ soient holomorphes au voisinage de l'origine, $r_1$ et $r_2$ désignant des constantes quelconques.

On peut admettre que $\mathrm{H}_1(0)$ et $\mathrm{H}_2(0)$ ne sont pas nuls : si le développement de $\mathrm{H}_1(x)$, par exemple, commençait par un terme en $x^n$, soit $a_0x^n$, il suffirait de mettre $y_1$ sous la forme

$$x^{r_1+n}(a_0+\ldots)$$

et l'on aurait alors $\mathrm{H}_1(0)=a_0\neq 0$. En multipliant au besoin $y_1$ et $y_2$ par un facteur constant, nous prendrons

$$\mathrm{H}_1(0)=\mathrm{H}_2(0)=1.$$

On aura alors pour $y_1$ et $y_2$ des développements de la forme

$$\begin{aligned} y_1&=x^{r_1}+a_1x^{r_1+1}+a_2x^{r_1+2}+\ldots,\\ y_2&=x^{r_2}+b_1x^{r_2+1}+b_2x^{r_2+2}+\ldots. \end{aligned} \tag{2}$$

Si l'on avait $r_1=r_2$, on remplacerait $y_2$ par $y_1-y_2$, qui est aussi une intégrale de l'équation (1). Nous supposerons donc $r_1\neq r_2$; de plus nous choisirons $r_1$ et $r_2$ de telle sorte que la partie réelle de $r_1-r_2$ soit positive ou nulle.

Le problème que nous nous proposons est donc de chercher à quelles condi-

tions l'équation (1) admet deux intégrales particulières, $y_1$ et $y_2$, représentées par les développements (2), où l'on a

$$r_1 \neq r_2, \qquad \text{partie réelle de } (r_1 - r_2) \geqslant 0,$$

ces deux développements étant convergents au voisinage de l'origine. Ces conditions font l'objet d'un important théorème, connu sous le nom de *théorème de* FUCHS, et dont nous ne donnerons qu'un cas particulier.

THÉORÈME. — *Pour que l'équation* (1) *admette deux solutions de la forme* (2), *il est nécessaire, mais non suffisant, que l'origine soit, au plus, un pôle du premier ordre pour la fonction* $p_1(x)$, *et du second ordre pour la fonction* $p_2(x)$.

Rappelons que si les fonctions $p_1$ et $p_2$ étaient holomorphes au voisinage de l'origine, il en serait de même de $y_1$ et $y_2$, et les exposants $r_1$ et $r_2$ seraient des entiers non négatifs : ceci résulte immédiatement des théorèmes d'existence.

Ce cas écarté, exprimons que $y_1$ et $y_2$ sont solutions de (1). On devra avoir

$$r_1(r_1-1)H_1 + 2r_1xH_1' + x^2H_1'' + (r_1H_1 + xH_1')p_1x + H_1p_2x^2 = 0,$$
$$r_2(r_2-1)H_2 + 2r_2xH_2' + x^2H_2'' + (r_2H_2 + xH_2')p_1x + H_2p_2x^2 = 0.$$

Ces deux équations sont linéaires par rapport à $p_1x$ et $p_2x^2$. En les résolvant, on obtiendra pour chacune de ces expressions une fraction dont les termes sont holomorphes au voisinage de l'origine; le dénominateur s'écrit

$$(r_1H_1 + xH_1')H_2 - (r_2H_2 + xH_2')H_1;$$

à l'origine ce dénominateur se réduit à $r_1 - r_2$, quantité non nulle. Donc $p_1x$ et $p_2x^2$ sont holomorphes à l'origine, ce qui démontre le théorème.

**171**. Supposons que $p_1$ et $p_2$ satisfassent à cette condition.

Posons
$$p_1 = \frac{A}{x} + \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots,$$
$$p_2 = \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \beta_0 + \beta_1 x + \dots.$$

Comme nous avons écarté le cas où $p_1$ et $p_2$ sont holomorphes à l'origine, l'un au moins des coefficients A, B, C est différent de zéro.

Exprimons que l'équation (1) admet une solution de la forme

$$(3) \qquad y = x^r + c_1x^{r+1} + c_2x^{r+2} + \dots.$$

Pour cela, nous n'avons qu'à substituer dans l'équation (1) le développement (3) et ceux qu'on en déduit pour $y'$ et $y''$. En égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de $x$, on aura des équations permettant de calculer $r$ et les coefficients indéterminés $c_i$.

Après la substitution indiquée, le terme du premier membre dont l'expo-

sant aura la plus petite partie réelle sera un terme en $x^{r-2}$; son coefficient devant être nul, on en déduit

$$(4) \qquad r(r-1)+Ar+B=0,$$

équation du second degré qui donne pour $r$ deux valeurs $r_1$ et $r_2$.

L'équation (4) porte le nom d'*équation déterminante* de l'équation différentielle relativement à l'origine. Désignons par $F(r)$ son premier membre.

On trouve facilement, pour le coefficient du terme en $x^{r-1}$,

$$c_1 F(r+1)+\alpha_0 r+C.$$

En égalant cette expression à zéro, on aura $c_1$, pourvu que $F(r+1)$ soit différent de zéro. En général, on aura pour le coefficient du terme en $x^{r+m-2}$

$$c_m F(r+m) + \text{combinaison linéaire de } c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_{m-1}.$$

En égalant ce coefficient à zéro, on en déduira $c_m$, pourvu que $F(r+m)$ soit différent de zéro.

On est ainsi amené à distinguer trois cas :

1[er] Cas. — *La différence* $r_1-r_2$ *n'est pas un nombre entier.*

D'abord $F(r_1+m)$ n'est jamais nul, de sorte que le calcul des $c_i$ n'est jamais arrêté. On trouve donc pour $y_1$ un développement tel que (3) où $r=r_1$. On obtiendra ensuite un second développement en prenant $r=r_2$, et cette fois encore le calcul des $c_i$ n'est jamais arrêté, car, par hypothèse, $F(r_2+m)$ ne peut s'annuler pour aucune valeur de l'entier $m$.

Nous admettrons sans démonstration — c'est le point délicat du théorème de Fuchs — que ces développements et les développements analogues que nous obtiendrons ultérieurement sont convergents pour des valeurs suffisamment petites de $|x|$. C'est encore un résultat qui s'établit par la méthode des fonctions majorantes.

2[e] Cas. — *La différence* $r_1-r_2$ *est nulle.*

Ce fait est en contradiction avec notre hypothèse initiale $r_1 \neq r_2$. Il ne peut donc exister deux intégrales distinctes de la forme (3). Il n'en existe qu'une, et les coefficients du développement se déduisent des coefficients de $p_1$ et $p_2$ par un calcul d'identification analogue à celui qui a été employé tout à l'heure. Nous allons montrer que, dans ce cas, l'intégrale générale renferme un terme logarithmique.

En effet, soit

$$y_1 = x_\rho + c_1 x^{\rho+1} + \ldots$$

l'intégrale particulière obtenue par la méthode des coefficients indéterminés, Par hypothèse $\rho$ est racine double de l'équation (4); on a donc

$$1-A=2\rho, \qquad B=\rho^2.$$

Posons $y=y_1 Y$. On a, pour déterminer $Y$, l'équation

$$Y'(p_1 y_1 + 2y_1') + y_1 Y'' = 0,$$

d'où l'on tire
$$Y' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1 dx}$$

Or on a, au voisinage de l'origine,
$$\frac{1}{y_1^2} = \frac{1}{x^{2\rho}}(1 + a_1 x + \ldots),$$
et, à un facteur constant près,
$$e^{-\int p_1 dx} = x^{-A}(1 + b_1 x + \ldots) = x^{2\rho - 1}(1 + b_1 x + \ldots).$$

On en déduit
$$Y' = \frac{1}{x}(1 + \lambda_1 x + \ldots)$$
et enfin
$$Y = \operatorname{Log} x + \lambda_1 x + \ldots,$$
ce qui montre que l'intégrale générale renferme toujours un terme logarithmique.

3ᵉ Cas. — *La différence $r_1 - r_2$ est un entier positif.*

Ici encore, $F(r_1 + m)$ ne s'annule jamais, quel que soit l'entier positif $m$. On obtiendra donc pour $y_1$ un développement tel que (3), qui donnera une intégrale particulière de l'équation (1).

Posons $r_1 - r_2 = p$. Si l'on cherche à former un développement analogue pour $y_2$, on calculera sans difficulté les coefficients $c_1, c_2, \ldots c_{p-1}$. Pour le coefficient $c_p$, on aura

$$(5) \qquad c_p F(r_2 + p) = \text{combinaison linéaire de } c_1, c_2, \ldots c_{p-1}.$$

Mais $F(r_2 + p) = F(r_1) = 0$. On ne pourra donc pas calculer $c_p$, et, *en général*, il n'existera pas de solution de la forme $x^{r_2} H_2(x)$.

Cependant, si les valeurs déjà obtenues pour $c_1, c_2, \ldots c_{p-1}$ annulent le second membre de l'équation (5), on voit que cette équation sera vérifiée quel que soit $c_p$. En laissant $c_p$ indéterminé, on pourra donc continuer le calcul des $c_i$ pour $i > p$, et l'on aura un développement de la forme (3) contenant une constante arbitraire : on en déduira immédiatement l'intégrale générale de l'équation (1).

En résumé, *dans tous les cas*, la méthode de Fuchs fournit un moyen théorique d'obtenir au moins une intégrale de l'équation (1), pourvu que $p_1$ et $p_2$ satisfassent aux conditions indiquées. On a alors l'intégrale générale par des quadratures.

Si l'on veut que cette intégrale soit holomorphe au voisinage de l'origine, il faut :

1° que l'équation (4) ait des racines entières, positives et distinctes;

2° que le second membre de l'équation (5) soit nul identiquement.

**172.** Application. — *Choisir de toutes les manières possibles les constantes $\lambda$, $\mu$ et $\nu$ de façon que l'équation différentielle*

$$(6) \qquad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x(\lambda x + \mu)\frac{dy}{dx} + (\nu x^2 + 4)y = 0$$

*ait son intégrale générale uniforme et finie à l'origine.*

L'équation (6) peut s'écrire

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{\mu}{x}+\lambda\right)\frac{dy}{dx}+\left(\nu+\frac{4}{x^2}\right)y=0.$$

Les coefficients de $y'$ et $y$ satisfont donc aux conditions de FUCHS. L'équation déterminante s'écrit ici

(7) $$r^2+r(\mu-1)+4=0.$$

Il faut tout d'abord écarter le cas où l'équation (7) aurait des racines égales, puisque dans ce cas l'intégrale générale contient un terme en $\operatorname{Log} x$, et par suite n'est pas uniforme au voisinage de l'origine.

Soient donc $r'$ et $r''$ les racines de l'équation déterminante. Si ces deux racines ne sont pas des entiers positifs, l'intégrale générale ne peut être uniforme au voisinage de l'origine et finie en ce point. Les racines $r'$ et $r''$ doivent donc être deux entiers positifs inégaux de produit égal à 4; on aura par suite

$$r'=4, \qquad r''=1,$$

d'où

$$\mu=-4.$$

L'équation (6) doit alors admettre une intégrale de la forme

$$y=x(1+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots),$$

d'où

$$y'=1+2c_1x+\ldots+nc_{n-1}x^{n-1}+\ldots,$$
$$y''=2c_1+6c_2x+\ldots+n(n-1)c_{n-1}x^{n-2}+\ldots.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (6), où l'on a fait $\mu=-4$, et identifiant à zéro le développement ainsi obtenu, on aura d'abord

$$2c_1=\lambda, \qquad 2c_2=\lambda^2+\nu,$$

puis, d'une façon générale,

(8) $$(n^2-5n+4)c_{n-1}+\lambda(n-1)c_{n-2}+\nu c_{n-3}=0.$$

Comme on connait déjà $c_1$ et $c_2$, cette équation fera connaître les autres coefficients $c_i$, *à l'exception de* $c_3$, puisque $n=4$ est racine du trinôme $n^2-5n+4$. On devra donc avoir

$$3\lambda c_2+\nu c_1=0,$$

ou

$$\lambda(3\lambda^2+4\nu)=0.$$

Si cette condition est satisfaite, on laissera $c_3$ arbitraire, et l'équation (8) fera connaître successivement $c_4$, $c_5$, .... L'intégrale générale de l'équation (6) sera alors uniforme et finie à l'origine.

En résumé, on devra prendre

ou bien $\lambda=0, \quad \mu=-4, \quad \nu$ quelconque;

ou bien $\lambda$ quelconque, $\quad \mu=-4, \quad \nu=-\frac{3\lambda^2}{4}$.

**173**. Considérons, pour donner une autre application, l'*équation de* GAUSS

$$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y=0,$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont des constantes quelconques. L'équation déterminante admet les deux racines

$$r_1=0, \qquad r_2=1-\gamma;$$

nous aurons donc deux hypothèses à examiner suivant que $\gamma$ est ou non égal à un nombre entier (*zéro* compris).

1re hypothèse : $\gamma$ *n'est ni nul, ni égal à un entier.*

Dans ce cas, l'équation de Gauss admet d'abord une intégrale de la forme

$$y=1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

correspondant à la racine $r_1=0$, et l'on a, pour déterminer les coefficients $a_i$, la relation récurrente

$$n(\gamma+n-1)a_n=(\alpha+n-1)(\beta+n-1)a_{n-1}, \qquad (a_0=1),$$

d'où l'on tire

$$a_n=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots(n-1)n\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}.$$

La série entière

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots,$$

qui est convergente dans le cercle de centre O et de rayon *un*, est appelée *série hypergéométrique*, et sa somme dans ce cercle est représentée par la notation

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x).$$

On voit qu'elle n'a de sens que si $\gamma$ n'est pas un nombre entier négatif ou nul; de plus si l'un des coefficients $\alpha$ ou $\beta$ est égal à un entier négatif elle se réduit à un polynome.

On a donc, comme intégrale particulière de l'équation de Gauss, l'intégrale

$$y_1=F(\alpha, \beta, \gamma; x)$$

qui est holomorphe au voisinage de l'origine.

Nous savons d'autre part qu'il existe une seconde intégrale de la forme

$$y_2=x^{1-\gamma}H_2(x),$$

$H_2$ désignant une fonction holomorphe au voisinage de l'origine. Pour déterminer $H_2$, faisons dans l'équation proposée le changement de variable $y=x^{1-\gamma}z$; on aura encore une équation de Gauss

$$x(1-x)z''+[2-\gamma-(\alpha+\beta+3-2\gamma)x]z'-(\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)z=0,$$

qui se déduit de la première par le changement de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ en $\alpha+1-\gamma$, $\beta+1-\gamma$ et $2-\gamma$; comme $2-\gamma$ ne peut être ni nul, ni égal à un nombre entier, l'équation en $z$ admet l'intégrale

$$z=F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; x),$$

qui est holomorphe au voisinage de l'origine; on en tire

$$y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma;\ x).$$

Il en résulte que, dans le cercle de centre O et de rayon *un*, l'intégrale générale de l'équation proposée est donnée par la formule

$$y = C_1 F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x) + C_2 x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma;\ x).$$

2$^e$ hypothèse : $\gamma$ *est nul ou égal à un entier.*

Nous distinguerons alors trois cas :

1$^{er}$ Cas : $\gamma$ *est un entier supérieur à* 1. Alors à la racine $r_1 = 0$ de l'équation déterminante correspond encore une intégrale holomorphe au voisinage de l'origine, savoir la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$; mais $2 - \gamma$ étant un entier négatif ou zéro, la série hypergéométrique $F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x)$ n'a plus de sens.

Cherchons à quelle condition l'équation de Gauss admettra dans ce cas une seconde intégrale particulière de la forme

$$y_2 = x^{1-\gamma}(1 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots).$$

En remplaçant dans l'équation proposée $y$ par le développement ci-dessus, on a, pour déterminer les coefficients $c_i$, la relation récurrente

$$n(n + 1 - \gamma) c_n = [(n - \gamma)(n - \gamma + \alpha + \beta) + \alpha\beta] c_{n-1} \qquad (c_0 = 1),$$

qui permet de déterminer $c_n$ sauf pour $n = \gamma - 1$. Pour cette valeur, le coefficient de $c_{n-1}$ doit aussi s'annuler, ce qui donne

$$(1 - \alpha)(1 - \beta) = 0.$$

Il n'existe donc une seconde intégrale de la forme indiquée que si l'un des coefficients $\alpha$ ou $\beta$ est égal à 1; on vérifiera sans difficulté que cette seconde intégrale peut être prise égale à $x^{1-\gamma}P(x)$, $P(x)$ étant un polynome de degré $\gamma - 2$.

2$^e$ Cas : $\gamma$ *est égal à un nombre entier négatif ou à zéro.* Alors la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ n'a plus de sens; mais $2 - \gamma$ étant un entier supérieur à 1, l'équation en $z$ admet l'intégrale $F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x)$, de sorte que l'équation proposée admet l'intégrale

$$y = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma;\ x).$$

Si l'un des nombres $\alpha + 1 - \gamma$ ou $\beta + 1 - \gamma$ est égal à 1, c'est-à-dire si l'un des nombres $\alpha$ ou $\beta$ est égal à $\gamma$, l'équation en $z$ admet en outre une intégrale particulière de la forme $x^{\gamma-1}P(x)$, P étant un polynome de degré $-\gamma$, et par conséquent l'équation en $y$ admet pour intégrale particulière un polynome de degré $-\gamma$.

3$^e$ Cas : $\gamma = 1$. Dans ce cas l'équation déterminante a une racine double; les deux séries hypergéométriques $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ et $F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x)$

sont identiques. L'équation proposée admet l'intégrale particulière $F(\alpha, \beta, 1; x)$, et l'on sait que l'intégrale générale contient toujours un terme logarithmique.

Remarque. — A l'*extérieur* du cercle de centre O et de rayon *un*, les séries hypergéométriques considérées ci-dessus n'ont plus de sens. Pour étudier dans ce domaine les intégrales de l'équation de Gauss, on fait le changement de variable indépendante $x = \frac{1}{t}$, et on obtient une nouvelle équation de Gauss, dont on aura à étudier les intégrales à l'*intérieur* du cercle de centre O et de rayon *un*.

De même le changement de variable $x = 1 - t$ permet d'étudier les intégrales au voisinage du point $x = 1$.

---

# EXERCICES SUR LE LIVRE III

**1.** On donne deux axes de coordonnées rectangulaires $Ox$, $Oy$. Soient T et N les points de rencontre de l'axe $Ox$ avec la tangente et la normale en un point M à une courbe (C) située dans le plan des deux axes. On demande de déterminer la courbe (C) de façon que le rayon de courbure en chaque point M de cette courbe soit égal à la longueur TN.

Démontrer qu'il existe deux courbes de cette espèce passant par un point donné du plan $xOy$ et tangentes en ce point à une droite donnée. Indiquer la forme de ces deux courbes.

(*Paris, épreuve écrite,* 1^re^ *question.*)

**2.** Soit $\mu(x, y)$ un facteur intégrant pour l'équation différentielle du 1^er^ ordre

$$dy - f(x, y)\,dx = 0. \tag{1}$$

Démontrer que la fonction $v(x, y) = \frac{\partial \log \mu}{\partial y}$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial v}{\partial x} + f\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \tag{2}$$

et qu'inversement, de toute intégrale de l'équation (2) on peut déduire un facteur intégrant pour l'équation (1). Trouver la forme que doit avoir la fonction $f(x, y)$ pour que l'équation (2) admette une intégrale particulière $v = X$ ne dépendant que de la variable $x$. En déduire l'intégrale générale de l'équation correspondante (1).

(*Paris, épreuve écrite,* 2^e^ *question.*)

**3.** Étant donnée l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = f(x)$ où $\lambda$ est une constante, $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle de 0 à $\pi$, déterminer une intégrale $Y(x)$, continue ainsi que $Y'(x)$ dans cet intervalle, sachant que l'on a $Y(0) = 0$ et que la dérivée $Y'(x)$ est nulle pour $x = \pi$. Discuter.

Il existe en général une seule intégrale $Y(x)$ répondant à la question, qui est représentée par la formule

$$Y = \int_0^x y_1(x, \alpha) f(\alpha)\,d\alpha + \int_x^\pi y_2(x, \alpha) f(\alpha)\,d\alpha,$$

$y_1(x, \alpha)$ et $y_2(x, \alpha)$ étant deux intégrales particulières de l'équation sans second membre $y'' + \lambda^2 y = 0$. Pourrait-on *a priori* déterminer ces deux intégrales $y_1$ et $y_2$.

(*Paris, épreuve écrite,* 2^e^ *question.*)

**4.** 1° Étant donnée l'équation différentielle

$$x^5 y'^2 - 3x^4 yy' + 2x^3 y^2 + y^4 = 0, \tag{1}$$

la substitution $y = uz$, $u$ et $z$ étant deux fonctions de $x$, la transforme en une équation de même forme en $z$. Déterminer $u$ de façon à faire disparaître le terme en $z^2$.

2° Intégrer l'équation en $z$ ainsi obtenue $\left(\text{on pourra prendre } \frac{1}{z} \text{ pour inconnue}\right)$.

3° Trouver l'enveloppe des solutions de l'équation (1); voir s'il y a une intégrale singulière.

4° Distinguer les points du plan par lesquels passent des intégrales réelles.

*(Besançon, épreuve écrite, 1re question.)*

**5.** On donne l'équation différentielle de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = a - \frac{2}{e^x - e^{-x}} + (e^x + e^{-x})\left(\frac{1}{e^x - e^{-x}} - a\right)y + ay^2,$$

$a$ étant une fonction donnée de $x$.

1° Démontrer qu'elle admet deux solutions $y_1$, $y_2$, dont le produit est $+1$. Les déterminer.

2° Ramener à une quadrature l'intégration de l'équation.

3° Intégrer complètement dans le cas où $a = \dfrac{3x^2 - 1}{x(x^2-1)(e^x - e^{-x})}$.

*(Alger, épreuve pratique.)*

**6.** Soit $y = \varphi(x, C)$ l'intégrale générale de l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + ay + b = 0,$$

où $a$ et $b$ sont des fonctions de $x$. Démontrer qu'on a, quel que soit C,

$$\int \varphi(x, C)\,dx = -\frac{1}{2}\log\frac{\partial\varphi}{\partial C} - \frac{1}{2}\int a\,dx.$$

*Application.* — Soient $y_1$, $y_2$, $y_3$ trois intégrales particulières de l'équation de Riccati. En déduire une formule donnant l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} + a\frac{dz}{dx} + bz = 0.$$

*(Paris, épreuve écrite, 2e question.)*

**7.** Intégrer l'équation différentielle

$$(x + 2x^2 + y^2)\,dy + y(1 - x)\,dx = 0,$$

sachant qu'elle admet un facteur intégrant de la forme $P^\alpha$, où $\alpha$ est une constante et P un polynome en $x$ et $y$ qui est du 1er degré en $x$. Trouver tous les facteurs intégrants de cette équation.

*(Paris, épreuve pratique.)*

**8.** I. Déterminer les constantes $a$, $b$, $c$ de façon que l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + ay^2 + 2bx + c = 0$$

admette une intégrale singulière, et effectuer l'intégration.

II. Pour des valeurs quelconques des constantes $a$, $b$, $c$, il passe en général deux courbes intégrales de l'équation (E), non tangentes l'une à l'autre, par un point quelconque du plan. Il y a exception pour tous les points d'une courbe (Γ). Indiquer la forme des courbes intégrales passant par un point M de Γ dans le voisinage de ce point, lorsque cette courbe Γ n'est pas une intégrale singulière.

N. B. — Si le temps le permet, on pourra vérifier les résultats en intégrant l'équation (E).

*(Paris, épreuve écrite, 2e question.)*

**9.** Soient $y = y_1(x)$, $z = z_1(x)$ un système particulier d'intégrales des équations (E)

$$\text{(E)} \qquad \frac{dy}{dx} = Ay + Bz, \qquad \frac{dz}{dx} = Cy + Dz,$$

où A, B, C, D sont des fonctions de la variable $x$. Démontrer que les équations (E) admet-

tent un autre système d'intégrales distinctes des premières, représentées par les formules

$$y_2 = \frac{f(x)}{z_1} + y_1 \int_{x_0}^{x} \left[ \frac{\varphi(x)}{y_1^2} + \frac{\psi(x)}{z_1^2} \right] dx,$$

$$z_2 = \frac{f(x)}{y_1} + z_1 \int_{x_0}^{x} \left[ \frac{\varphi(x)}{y_1^2} + \frac{\psi(x)}{z_1^2} \right] dx,$$

les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ne dépendant que des coefficients A, B, C, D.

(*Paris, épreuve écrite*, 2$^{e}$ *question*.)

**10.** Étant donnée l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad x(y'' - y') - ay = 0,$$

où $a$ est constant, on demande comment il faut choisir le chemin d'intégration L pour que la fonction $y(x)$ représentée par l'intégrale définie

$$y(x) = \int_{(L)} e^{zx} z^{a-1} (z-1)^{-a-1} dz$$

soit une intégrale particulière de (E). Démontrer que l'équation (E) admet une intégrale particulière qui s'exprime sans aucun signe de quadrature lorsque $a$ est un nombre entier. En déduire l'intégrale générale, et l'exprimer au moyen du plus petit nombre de transcendantes possible.

(*Paris, épreuve pratique*.)

**11.** On considère l'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + x^2 f(x) y = 0,$$

où $f$ est une fonction holomorphe dans le domaine de l'origine. Sachant que cette équation admet une intégrale particulière *holomorphe* dans ce domaine

$$y_1 = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots,$$

en déduire que l'intégrale générale est *uniforme* dans ce domaine.

Peut-on étendre cette propriété à toute équation de la forme

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + n\frac{dy}{dx} + x^{n-1} f(x) y = 0,$$

$n$ désignant un entier positif.

(*Paris, épreuve écrite*, 1$^{re}$ *question*.)

**12.** Intégrer l'équation différentielle

$$x(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \varphi(x).$$

Démontrer qu'on peut, d'une infinité de manières, remplacer $\varphi$ par un polynome, de telle sorte que cette intégrale soit une fonction algébrique. Équation générale de ces polynomes.

(*Paris, épreuve écrite*, 1$^{re}$ *question*.)

**13.** Intégrer l'équation différentielle linéaire

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = \operatorname{Log}(1+x).$$

Démontrer que cette équation admet une intégrale particulière holomorphe dans le domaine de l'origine, et donner l'expression de cette intégrale.

(*Paris, épreuve écrite*, 1$^{re}$ *question*.)

**14.** Intégrer l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$x(x+1)\frac{d^2y}{dx^2} + (x+2)\frac{dy}{dx} - y = e^x(ax^2 + bx + c),$$

sachant que l'équation sans second membre admet une intégrale particulière de la forme $y_1 = x^n$, $n$ étant constant.

Trouver les conditions auxquelles doivent satisfaire les constantes $a$, $b$, $c$ pour que l'intégrale générale soit une fonction uniforme de $x$, et exprimer dans ce cas cette intégrale sans aucun signe de quadrature.

(*Paris, épreuve écrite*, 1$^{re}$ *question*.)

**15.** 1° Intégrer l'équation différentielle

$$\text{(I)} \qquad \sin t \frac{dy}{dt} + 3y \cos t = 3;$$

déterminer la solution de cette équation qui prend la valeur $\frac{3\pi}{4}$ pour $t = \frac{\pi}{2}$.

2° Dans l'équation différentielle (I), faire le changement de variable défini par la relation

$$x = \sin^2 \frac{t}{2},$$

et montrer que l'équation transformée [équation (II)] admet une solution de la forme

$$y = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots,$$

les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des constantes. Déterminer ces coefficients et le rayon de convergence de la série.

Vérifier que si l'on différentie l'équation (II), on obtient une équation du second ordre

$$\text{(III)} \qquad 2x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (5 - 10x)\frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

3° Dans l'équation (III) faire successivement le changement de fonction inconnue et le changement de variable définis par les relations

$$y = x^{-\frac{3}{2}} z, \qquad x = 1 - x_1.$$

Montrer que l'équation différentielle ainsi obtenue admet une solution de la forme $z = x_1^n$, $n$ étant un exposant constant convenablement déterminé.

*(Rennes, épreuve théorique, 1re question.)*

**16.** I. $x$ étant la variable indépendante et $y$ la fonction inconnue, on considère l'équation

$$(1) \qquad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

et l'on demande :

A) quelle relation doit exister entre P et Q pour que l'équation (1) admette deux intégrales linéairement distinctes dont l'une est la dérivée de l'autre, et d'intégrer dans ce cas l'équation;

B) d'exprimer dans la même hypothèse, à l'aide d'une même fonction arbitraire, les couples de fonctions P et Q satisfaisant à la relation demandée ci-dessus;

C) si l'équation (1) peut admettre, dans les conditions (A), deux couples d'intégrales $y_1$ et $y_1'$, $y_2$ et $y_2'$, tels que $y_1$ et $y_2$ soient linéairement distinctes.

II. Étant donnée l'équation

$$(2) \qquad (1+x^2)(1-x^2)^2 y'' - 4x(1-x^2)y' + (1-3x^2)y = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^4)^2 e^x,$$

vérifier que l'équation sans second membre possède la propriété énoncée au paragraphe (A) et intégrer complètement l'équation (2).

*(Nancy, épreuve théorique.)*

**17.** 1° Soit l'équation différentielle

$$xy' - y = \frac{y^2 - x^2}{ax^2 + bx + c},$$

où $a$, $b$, $c$ désignent des constantes réelles.

Montrer qu'elle admet des intégrales particulières indépendantes de $a$, $b$, $c$.

2° Écrire l'intégrale générale en distinguant les trois cas suivants :

$$b^2 - 4ac > 0, \qquad b^2 - 4ac = 0, \qquad b^2 - 4ac < 0.$$

3° Pour que l'intégrale générale soit rationnelle, il faut et il suffit que $\frac{4}{b^2 - 4ac}$ soit le carré d'un entier.

4° L'intégrale peut-elle être uniforme dans tout le plan de la variable complexe sans se réduire à une fraction rationnelle? Trouver, dans ce cas, les points singuliers d'une intégrale. Préciser leur nature en remontant aux définitions. Prouver qu'ils sont sur une même circonférence.

*(Poitiers, épreuve théorique.)*

**18.** Soient $Ox$ et $Oy$ deux axes de coordonnées rectangulaires, M un point d'une courbe plane C du plan $xOy$, MP la distance du point M à l'axe $Oy$, OT la distance de l'origine à la tangente en M à la courbe C. On demande de déterminer les courbes C telles que le rapport $\frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{MP}}$ soit égal à une constante donnée $k$, et d'exprimer les coordonnées d'un point M de l'une de ces courbes au moyen de l'angle $\alpha$ que fait la tangente en M à la courbe C avec l'axe des $x$. Construire les courbes C correspondant à $k=1$ et $k=\frac{1}{2}$.

(*Paris, épreuve écrite, 1re question.*)

**19.** On demande l'intégrale générale de l'équation

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = \cos x.$$

Montrer qu'il existe une seule intégrale continue pour $x=0$, et donner son expression sans aucun signe de quadrature.

(*Paris, épreuve écrite, 2e question.*)

**20.** On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad x^2y'' + xy' - \left(\frac{1}{4} + ax\right)y = 0,$$

où $a$ est une constante donnée :

1° Trouver une solution de (1) qui reste finie pour $x=0$. Cette solution apparaîtra comme le produit d'une fonction élémentaire par une série entière dont on étudiera la convergence. Cette solution est-elle entièrement déterminée?

2° Comment peut-on en déduire l'intégrale générale de l'équation (1) sous forme d'un développement en série? Calculer les trois premiers termes de ce développement.

3° Cas particulier où $a=0$.

(*Grenoble, épreuve pratique.*)

**21.** 1° Intégrer l'équation différentielle

$$2xydy + (x^2 - y^2 + 1)dx = 0.$$

2° Expression générale de ses facteurs intégrants.

3° Trajectoires orthogonales des courbes intégrales.

4° Montrer que le réseau formé par les courbes intégrales et leurs trajectoires orthogonales est un réseau de courbes isothermes.

(*Lyon, épreuve théorique.*)

**22.** Intégrer l'équation différentielle

$$mu - z\frac{du}{dz} + \frac{2z^m}{1-z^2} = 0,$$

où $m$ est un nombre entier positif donné, $z$ la variable indépendante et $u$ la fonction.

Le point $z$ décrivant dans le plan des $z$ l'un quelconque des cercles qui passent au point $z=+i$, à l'exclusion de ceux qui passeraient par les points singuliers, calculer les valeurs au point $z=+i$ de la fonction $u$ de $z$ qui correspond à la valeur zéro de la constante arbitraire dans l'intégrale générale et leurs variations quand le point $z$ revient au même point $z=+i$.

Distinguer, suivant ces variations, divers groupes de cercles.

(*Marseille, épreuve pratique.*)

**23.** Démontrer que toute équation différentielle de la forme

$$(y-x)y'' + F(y') = 0$$

admet une intégrale première de la forme

$$(y-x)f(y') = C,$$

C désignant une constante arbitraire, $f(y')$ une fonction de $y'$ seul. En déduire l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(y-x)y'' + (1+y')(1+y'^2) = 0.$$

(*Paris, épreuve théorique, 1re question.*)

**24**. Étant donnée une équation différentielle du second ordre

$$(1)\qquad y'' + a(x, y)y' + b(x, y) = 0,$$

on demande d'indiquer une méthode permettant de reconnaître si cette équation admet une intégrale intermédiaire de la forme

$$f(x, y)y' + \varphi(x, y) = C,$$

et de déterminer les fonctions $f$ et $\varphi$.

Examiner en particulier le cas où $b = 0$, et montrer que l'équation (1) s'intègre par des quadratures.

*(Paris, épreuve théorique, 2e question.)*

**25**. Démontrer que l'intégration de l'équation différentielle

$$2y - 2xy' + x^2y'' + xf(y'') + 1 = 0$$

se ramène à des quadratures, quelle que soit la fonction $f$.

Même question pour l'équation

$$y = xy' + x^2f(y'') + \varphi(y''),$$

où $f$ et $\varphi$ sont des fonctions arbitraires. Généralisation.

**26**. Intégrer, par la méthode de Fuchs, l'équation de Bessel

$$xy'' + 2\mu y' + xy = 0.$$

**27**. A) Démontrer que l'équation différentielle

$$y = x\varphi(y') + \psi(y')$$

n'admet une intégrale singulière que dans l'un des cas suivants :

*a)* $\varphi(y') = y'$;

*b)* il existe un nombre $\alpha$ tel que

$$\varphi(\alpha) - \alpha = 0, \qquad \varphi'(\alpha) = 0, \qquad \psi'(\alpha) = 0.$$

B) Intégrer l'équation différentielle

$$yy' = x(y'^2 - y' + 1) + y'^3 - 2y'^2;$$

ntégrale singulière; lieu des points de rebroussement des courbes intégrales.

*(Rennes, épreuve théorique, 2e question.)*

# LIVRE IV

# GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE

---

## CHAPITRE PREMIER

## PRINCIPES DU CALCUL VECTORIEL

**174.** Nous emploierons dans ce Livre les méthodes du *Calcul vectoriel*, qui introduisent, dans *l'exposé* des théories géométriques, des simplifications incontestables. Nous éviterons soigneusement toutefois d'établir une cloison étanche entre la méthode vectorielle et celle des axes de coordonnées, et nous aurons soin, en particulier, de traduire tous *les résultats* essentiels en formules cartésiennes. Du calcul vectoriel, nous n'utiliserons d'ailleurs que les notions indispensables à notre objet, qui est d'établir les propriétés fondamentales des lignes et des surfaces; ces notions, extrêmement simples, sont à la base de l'enseignement élémentaire de la mécanique, et, comme telles, relèvent déjà du programme de mathématiques générales : aussi suffira-t-il, pour la plupart d'entre elles, de les rappeler rapidement.

**175.** On nomme *vecteur* une portion de droite orientée. Pour caractériser un vecteur il faut donc se donner son origine, sa direction, son sens, et le nombre qui mesure sa longueur par rapport à une unité arbitrairement choisie. Deux vecteurs identiques, à l'origine près, sont dits *équipollents*.

Nous nous conformerons aux notations des *Leçons de Géométrie vectorielle*, de M. Bouligand [1]. Un vecteur d'origine A et d'extrémité B sera désigné par la notation **AB**; nous représenterons quelquefois un vecteur par une seule lettre, **u**, et dans ce cas nous désignerons par $u$ sa longueur.

A la *grandeur vectorielle* s'oppose la *grandeur scalaire*, qui est indépendante de toute orientation dans l'espace, et a seulement une valeur numérique. Une vitesse est une grandeur vectorielle, tandis qu'une température ou un travail sont des grandeurs scalaires.

---

[1] Cf. aussi *Initiation aux Méthodes vectorielles*, par MM. Bouligand et Rabaté.

Dans ce qui suit nous supposerons toujours que l'espace est orienté, et que les axes de coordonnées forment un trièdre trirectangle $Oxyz$ de sens direct.

Un vecteur est alors déterminé par les coordonnées de son origine $(x_0, y_0, z_0)$ et de son extrémité $(x_1, y_1, z_1)$. Les quantités

$$X = x_1 - x_0, \qquad Y = y_1 - y_0, \qquad Z = z_1 - z_0$$

sont les *composantes* du vecteur. S'il s'agit d'un vecteur *libre*, c'est-à-dire d'un vecteur défini seulement en grandeur géométrique et auquel on peut attribuer une origine quelconque, les composantes (X, Y, Z) le déterminent complètement : en particulier, un vecteur est dit *nul* quand ses composantes sont nulles. Il est clair que deux vecteurs équipollents ont mêmes composantes, et réciproquement.

Toute égalité vectorielle est équivalente à trois égalités relatives aux coordonnées cartésiennes : on pressent, à l'aide de cette remarque, les simplifications qui doivent résulter de l'emploi systématique du calcul vectoriel.

A moins d'indication contraire, nous ne considérerons désormais que des vecteurs libres.

**176.** Soient deux vecteurs, $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$, $(X_1, Y_1, Z_1)$ et $(X_2, Y_2, Z_2)$ leurs composantes, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ leurs cosinus directeurs. On aura

$$X_i = \alpha_i u_i, \qquad Y_i = \beta_i u_i, \qquad Z_i = \gamma_i u_i, \qquad (i = 1, 2).$$

Les conditions de parallélisme et d'orthogonalité, savoir

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \pm 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0,$$

peuvent donc s'écrire

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \qquad \text{et} \qquad X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$$

Les opérations fondamentales que l'on peut effectuer sur ces vecteurs sont :

1° L'*addition géométrique* : on appelle *somme géométrique* des deux vecteurs $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$, et l'on représente par la notation $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$, un nouveau vecteur de composantes

$$X_1 + X_2, \qquad Y_1 + Y_2, \qquad Z_1 + Z_2.$$

Plus généralement, si $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont des scalaires quelconques, le symbole $\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2$ représente, *par définition*, un vecteur de composantes

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \qquad \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2, \qquad \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 \text{ (1)}.$$

Il est clair que ces définitions s'étendent telles quelles au cas d'un nombre quelconque de vecteurs.

Rappelons que, dans le cas de deux ou trois vecteurs, la somme géométrique a une interprétation bien connue (règle du parallélogramme et du parallélépipède).

(1) On dit que le vecteur $\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$.

2° La *multiplication scalaire*; on appelle *produit scalaire* des vecteurs $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$, et on représente par la notation $\boldsymbol{u}_1 . \boldsymbol{u}_2$, une quantité scalaire égale à

$$u_1 u_2 \cos(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2);$$

on a d'ailleurs

$$\cos(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{u_1u_2},$$

ce qui montre que le produit scalaire a pour valeur

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

Ce produit ne peut être nul que si l'un des vecteurs est nul ou orthogonal à l'autre.

Remarquons en outre que l'on a, en désignant par $\boldsymbol{u}$ un vecteur quelconque,

$$\boldsymbol{u} . \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u})^2 = u^2 \qquad \text{ou} \qquad u = \sqrt{(\boldsymbol{u})^2}.$$

3° La *multiplication vectorielle*. Soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur *unitaire* (c'est-à-dire de longueur *un*) perpendiculaire au plan des vecteurs $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$, $\theta$ l'angle, compris entre $-\pi$ et $+\pi$, de ces deux vecteurs, compté positivement de $\boldsymbol{u}_1$ vers $\boldsymbol{u}_2$ dans le sens direct autour de $\boldsymbol{v}$. On appelle *produit vectoriel* du vecteur $\boldsymbol{u}_1$ par le vecteur $\boldsymbol{u}_2$, et on représente par la notation

$$\boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_2,$$

un vecteur égal à

$$u_1 u_2 \sin\theta \, \boldsymbol{v}.$$

Si le trièdre $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})$ est direct, $\theta$ est positif (*fig.* 3 *a*), et le vecteur $\boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_2$ ayant même *sens* que $\boldsymbol{v}$, le trièdre $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_2)$ est aussi direct. Si le trièdre

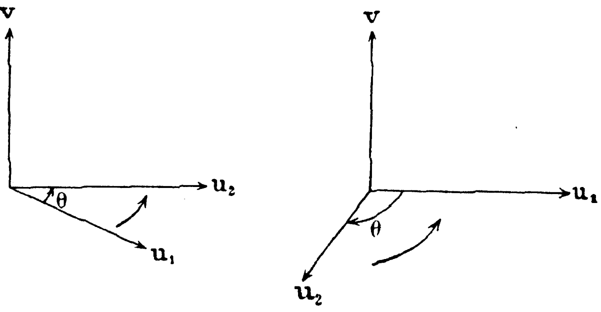



Fig. 3 *a*. Fig. 3 *b*.

$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})$ est rétrograde, $\theta$ est négatif (*fig.* 3 *b*), $\boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{v}$ sont de sens opposés, et par suite le trièdre $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_2)$ est encore direct. Il en résulte que le produit vectoriel $\boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_2$ a un sens indépendant du sens de $\boldsymbol{v}$.

Supposons alors que $\boldsymbol{v}$ ait été choisi de telle sorte que le trièdre $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})$ soit direct. Soient (X, Y, Z) les composantes de $\boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_2$; nous allons chercher à exprimer ces composantes au moyen de celles des vecteurs $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$.

Le vecteur $\boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_2$ étant perpendiculaire à $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$, on aura d'abord

$$XX_1 + YY_1 + ZZ_1 = 0, \qquad XX_2 + YY_2 + ZZ_2 = 0,$$

d'où, en désignant par $\rho$ un coefficient indéterminé,

$$X = \rho(Y_1Z_2 - Z_1Y_2), \qquad Y = \rho(Z_1X_2 - X_1Z_2), \qquad Z = \rho(X_1Y_2 - Y_1X_2).$$

On a alors d'une part

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = u_1^2u_2^2 \sin^2\theta\,;$$

d'autre part, d'après l'identité de Lagrange,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \rho^2[(X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2)(X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2) - (X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2)^2]$$
$$= \rho^2(u_1^2u_2^2 - u_1^2u_2^2\cos^2\theta) = \rho^2u_1^2u_2^2\sin^2\theta,$$

et par suite

$$\rho = \pm 1.$$

Pour lever l'ambiguïté sur le signe de $\rho$, il nous suffit évidemment de considérer les produits vectoriels qui ne sont pas nuls. Dans ce cas, imprimons aux axes un mouvement continu : les quantités X, Y, Z d'une part, et $Y_1Z_2 - Z_1Y_2$, $Z_1X_2 - X_1Z_2$, $X_1Y_2 - Y_1X_2$ d'autre part, varient d'une façon continue, et ne peuvent s'annuler simultanément, puisque le produit vectoriel n'est pas nul ; il en résulte que $\rho$ ne peut passer de la valeur $-1$ à la valeur $+1$ et reste nécessairement invariable. Les axes étant ainsi amenés dans une position telle que le vecteur $\boldsymbol{v}$ soit dirigé suivant le demi-axe $Oz$ et $\boldsymbol{u}_1$ suivant le demi-axe $Ox$ (*fig.* 4), on aura

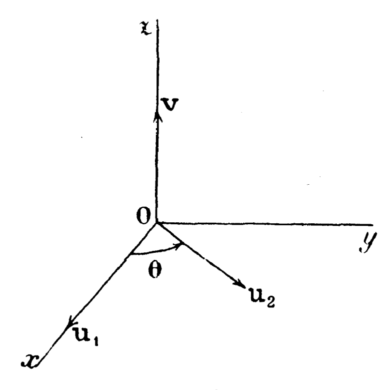



Fig. 4.

$$X_1 = u_1, \qquad Y_1 = 0, \qquad Z_1 = 0;$$
$$X_2 = u_2\cos\theta, \qquad Y_2 = u_2\sin\theta, \qquad Z_2 = 0;$$
$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = u_1u_2\sin\theta,$$

c'est-à-dire

$$Z = X_1Y_2 - Y_1X_2$$

et par suite

$$\rho = +1.$$

Ainsi $\rho$ est constamment égal à $+1$. Le produit vectoriel $\boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_2$ a donc pour composantes

$$X = Y_1Z_2 - Z_1Y_2, \qquad Y = Z_1X_2 - X_1Z_2, \qquad Z = X_1Y_2 - Y_1X_2.$$

**177**. On vérifie aisément, en partant des formules et définitions ci-dessus, les propriétés de *commutativité* et de *distributivité* exprimées par les relations suivantes :

$$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_1, \qquad \boldsymbol{u}_1 . \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2 . \boldsymbol{u}_1,$$
$$\boldsymbol{u} . (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u} . \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u} . \boldsymbol{u}_2, \qquad \boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}_2.$$

La dernière, par exemple, résulte des identités

$$Y(Z_1+Z_2)-Z(Y_1+Y_2)=(YZ_1-ZY_1)+(YZ_2-ZY_2),$$
$$Z(X_1+X_2)-X(Z_1+Z_2)=(ZX_1-XZ_1)+(ZX_2-XZ_2),$$
$$X(Y_1+Y_2)-Y(X_1+X_2)=(XY_1-YX_1)+(XY_2-YX_2).$$

Considérons un axe quelconque, et sur cet axe un vecteur $u$ de longueur *un*, dirigé dans le sens positif. Soit $v$ un vecteur quelconque : le produit scalaire $u.v$ est égal, en grandeur et signe, à la projection de $v$ sur l'axe. La formule

$$u.(u_1+u_2)=u.u_1+u.u_2$$

exprime alors que la somme algébrique des projections de deux vecteurs sur un axe orienté est égale à la projection de leur somme géométrique sur l'axe (*théorème des projections*).

Soient d'autre part $u$ et $v$ deux vecteurs ayant même origine, et A l'extrémité du vecteur $u$. Ce qu'on appelle, en Mécanique, moment linéaire du vecteur $v$ par rapport au point A, n'est autre que le produit vectoriel $u \wedge v$. La formule

$$u \wedge (u_1+u_2)=u \wedge u_1+u \wedge u_2,$$

où l'on suppose que les trois vecteurs $u$, $u_1$ et $u_2$ ont même origine, exprime que la somme géométrique des moments linéaires de deux vecteurs est égale au moment de leur somme géométrique : c'est le *théorème de* VARIGNON.

Il est évident que la multiplication vectorielle n'est pas commutative, puisque l'on a $u_1 \wedge u_2=-u_2 \wedge u_1$.

Le produit vectoriel $u_1 \wedge u_2$ ne peut être nul que si l'un des vecteurs est nul ou parallèle à l'autre. Dans les deux cas, on peut trouver deux scalaires, $\lambda_1$ et $\lambda_2$, dont l'un au moins n'est pas nul, tels que l'on ait

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2=0,$$

car cette relation vectorielle est équivalente aux équations

$$\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2=0, \qquad \lambda_1 Y_1+\lambda_2 Y_2=0, \qquad \lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2=0;$$

si $u_1=0$, on prendra $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=0$; si les deux vecteurs sont différents de zéro et parallèles, les trois équations ci-dessus se réduisent à une seule,

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2=0,$$

ou

$$\lambda_1 u_1-\lambda_2 u_2=0,$$

suivant que les vecteurs $u_1$ et $u_2$ sont de même sens ou non : il suffira donc de prendre $\lambda_1=u_2$, $\lambda_2=\mp u_1$.

Deux vecteurs $u_1$ et $u_2$ satisfaisant à une relation telle que

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2=0$$

sont dits *colinéaires*; inversement, si l'on a une telle relation, soit par exemple $\lambda_1 \neq 0$, on aura

$$(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2) \wedge u_2=0,$$

ou

$$\lambda_1 u_1 \wedge u_2+\lambda_2 u_2 \wedge u_2=0,$$

ou enfin

$$u_1 \wedge u_2=0.$$

Ainsi, pour que deux vecteurs soient colinéaires, il faut et il suffit que leur produit vectoriel soit nul.

Considérons maintenant trois vecteurs $u_1$, $u_2$ et $u_3$, de composantes $(X_1, Y_1, Z_1)$, $(X_2, Y_2, Z_2)$ et $(X_3, Y_3, Z_3)$. Nous désignerons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

par la notation $(u_1, u_2, u_3)$. Des propriétés élémentaires des déterminants, on déduit immédiatement les relations

$$(\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \lambda_3 u_3) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3(u_1, u_2, u_3),$$
$$(u_1, u_2, u_3 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = (u_1, u_2, u_3),$$
$$(u_1, u_2, u_3) = -(u_1, u_3, u_2), \text{ etc.},$$

les $\lambda_i$ étant des scalaires. Ceci posé on dit que les trois vecteurs sont *coplanaires* si l'on peut trouver trois scalaires, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, non tous nuls, tels que l'on ait

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0.$$

Cette relation vectorielle est équivalente aux équations

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0,$$
$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3 Y_3 = 0,$$
$$\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3 = 0;$$

pour que ce système soit satisfait par des valeurs non toutes nulles de $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$, il faut et il suffit que l'on ait

$$(u_1, u_2, u_3) = 0;$$

telle est la condition nécessaire et suffisante pour que les trois vecteurs $u_1$, $u_2$, $u_3$ soient coplanaires : l'un de ces vecteurs est alors une combinaison linéaire des deux autres.

Remarquons que la relation

$$u_3 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2,$$

où l'on suppose que les vecteurs $u_1$ et $u_2$ sont des vecteurs unitaires, exprime que la projection de $u_3$, parallèlement à $u_2$, sur l'axe orienté positivement dans le sens de $u_1$ a pour valeur algébrique $\lambda_1$ ; de même $\lambda_2$ est la valeur algébrique de sa projection, parallèlement à $u_1$, sur l'axe orienté positivement dans le sens de $u_2$.

Indiquons enfin les trois relations suivantes, qui s'établissent immédiatement par le passage aux composantes :

$$u_1.(u_2 \wedge u_3) = (u_1, u_2, u_3),$$
$$(u_1 \wedge u_2) \wedge u_3 = (u_1.u_3)u_2 - (u_2.u_3)u_1,$$
$$(u.v)(u_1.v_1) - (u.v_1)(u_1.v) = (u \wedge u_1).(v \wedge v_1).$$

Cette dernière relation contient comme cas particulier ($u = v$, $u_1 = v_1$) l'identité de Lagrange. Nous l'appellerons l'*identité de* Lagrange *généralisée*.

**178**. Considérons maintenant une correspondance établie entre les valeurs numériques d'une variable $t$ et une grandeur vectorielle $\boldsymbol{u}$ : on dit que $\boldsymbol{u}$ est fonction de $t$. Si le vecteur $\boldsymbol{u}(t_0+h)-\boldsymbol{u}(t_0)$ tend vers zéro avec $h$, on dit que $\boldsymbol{u}$ est continu pour $t=t_0$. Si le vecteur $\dfrac{\boldsymbol{u}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)}{h}$ tend vers un vecteur bien déterminé quand $h$ tend vers zéro, on donne à ce vecteur limite le nom de *vecteur dérivé*, et on le représente par $\boldsymbol{u}'(t)$ ou $\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}$.

Les vecteurs dérivés successifs $\boldsymbol{u}''(t)$, $\boldsymbol{u}'''(t)$, ... se définissent de la même façon.

Les composantes X, Y, Z du vecteur $\boldsymbol{u}(t)$ sont aussi des fonctions de la variable $t$; il est clair que $X'(t)$, $Y'(t)$ et $Z'(t)$ sont les composantes de $\boldsymbol{u}'(t)$, et, d'une façon générale, $X^{(n)}(t)$, $Y^{(n)}(t)$ et $Z^{(n)}(t)$ les composantes de $\boldsymbol{u}^{(n)}(t)$. On déduit très simplement de cette remarque que les règles ordinaires du calcul des dérivées s'étendent aux fonctions vectorielles; ainsi l'on a

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t).\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'.\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}',$$

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t)\wedge\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'\wedge\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}',$$

$\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ désignant deux vecteurs fonctions de $t$.

Les notions de *fonctions de plusieurs variables* et de *dérivées partielles* s'étendent de même du domaine scalaire au domaine vectoriel. Si, par exemple, $\boldsymbol{u}$ est un vecteur dépendant des valeurs numériques de deux variables $\alpha$ et $\beta$, ses composantes X, Y, Z seront des fonctions de $\alpha$ et $\beta$: $\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\alpha}$ et $\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\beta}$ seront des vecteurs de composantes $\left(\dfrac{\partial X}{\partial\alpha},\dfrac{\partial Y}{\partial\alpha},\dfrac{\partial Z}{\partial\alpha}\right)$ et $\left(\dfrac{\partial X}{\partial\beta},\dfrac{\partial Y}{\partial\beta},\dfrac{\partial Z}{\partial\beta}\right)$, et l'on aura, comme dans le domaine scalaire,

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial\beta\partial\alpha}.$$

Terminons ces préliminaires par une remarque importante. Supposons que les trois composantes $X(t)$, $Y(t)$ et $Z(t)$ du vecteur $\boldsymbol{u}(t)$ soient des fonctions analytiques de $t$, par exemple au voisinage de $t=0$. On aura

$$X(t)=X(0)+tX'(0)+\frac{t^2}{2!}X''(0)+\ldots,$$

et deux autres développements analogues pour $Y(t)$ et $Z(t)$. On pourra réunir ces trois formules en une seule formule vectorielle, que l'on écrira

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}(0)+t\boldsymbol{u}'(0)+\frac{t^2}{2!}\boldsymbol{u}''(0)+\ldots;$$

ce sera la formule de Taylor dans le domaine vectoriel. Mais il faut remarquer que l'on ne pourra pas, en général, dans cette dernière formule, arrêter le développement du second membre, et écrire, par exemple, comme pour les fonctions scalaires,

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}(0)+\ldots+\frac{t^n}{n!}\boldsymbol{u}^{(n)}(0)+\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\boldsymbol{u}^{(n+1)}(\theta t)\qquad(0<\theta<1),$$

car on aura bien

$$X(t) = X(0) + \dots + \frac{t^n}{n!} X^{(n)}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} X^{(n+1)}(\theta_1 t), \qquad (0 < \theta_1 < 1),$$

$$Y(t) = Y(0) + \dots + \frac{t^n}{n!} Y^{(n)}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} Y^{(n+1)}(\theta_2 t), \qquad (0 < \theta_2 < 1),$$

$$Z(t) = Z(0) + \dots + \frac{t^n}{n!} Z^{(n)}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} Z^{(n+1)}(\theta_3 t), \qquad (0 < \theta_3 < 1),$$

mais les fonctions $X(t)$, $Y(t)$ et $Z(t)$ pouvant être prises arbitrairement, il est clair qu'on n'aura pas en général $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$.

On peut observer que, dans le cas de $n = 0$, l'impossibilité d'écrire la formule

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(0) + t\boldsymbol{u}'(\theta t)$$

équivaut à l'impossibilité de trouver sur un arc de courbe *gauche* un point où la tangente soit parallèle à la corde sous-tendante.

Dans le cas général, on pourra cependant, pourvu que le vecteur $\boldsymbol{u}^{(n+1)}(t)$ soit continu pour $t = 0$, écrire un développement limité sous la forme

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(0) + \dots + \frac{t^n}{n!} \boldsymbol{u}^{(n)}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} [\boldsymbol{u}^{(n+1)}(0) + \boldsymbol{\alpha}],$$

$\boldsymbol{\alpha}$ désignant un vecteur infiniment petit avec $t$.

---

## CHAPITRE II

## COURBES GAUCHES

### § I. — Éléments infinitésimaux d'une courbe gauche. Représentation sphérique.

**179.** Considérons une courbe gauche Γ, sur laquelle nous prendrons arbitrairement un sens positif et un point A comme origine des arcs [1]. Soit M, un point variable sur Γ; nous désignerons par $s$ la valeur algébrique de l'arc AM. Enfin soit O l'origine des axes de coordonnées rectangulaires : nous représenterons désormais par **P** le vecteur **OP**, P étant un point quelconque de l'espace.

Le vecteur **M** est une certaine fonction de $s$, que nous supposons continue et dérivable, de composantes $(x, y, z)$; la relation

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1$$

montre que le vecteur $\frac{d\mathbf{M}}{ds}$ est un vecteur de longueur 1, qui est évidemment parallèle à la tangente menée en M à Γ dans le sens des arcs croissants. Soit $m$ (*fig.* 5) l'extrémité d'un vecteur $\boldsymbol{t}$, d'origine O, équipollent à $\frac{d\mathbf{M}}{ds}$; quand M décrit Γ, $m$ décrit, sur la sphère de centre O et de rayon *un*, une courbe appelée *indicatrice sphérique des tangentes*. Au sens positif choisi sur Γ correspond sur l'indicatrice un sens de parcours bien déterminé, que nous prendrons pour sens

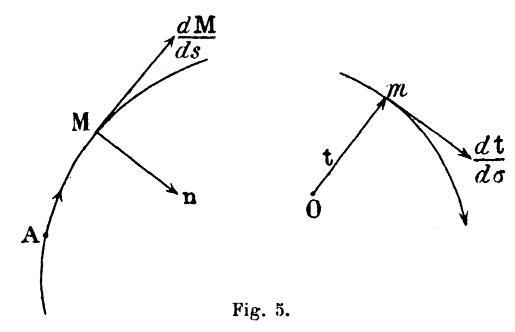



Fig. 5.

---

[1] Nous supposons connus les résultats établis dans le Cours de Mathématiques générales au sujet des courbes et surfaces (équations de la tangente, normale principale, plan osculateur, plan tangent, etc.).

positif; si donc on appelle $\sigma$ la valeur algébrique de l'arc de l'indicatrice, le scalaire $\frac{ds}{d\sigma}$ sera essentiellement positif, et on aura

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{d\sigma} = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\frac{ds}{d\sigma} = \frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2}\frac{ds}{d\sigma}. \tag{1}$$

Si l'on change le sens positif de parcours sur $\Gamma$, le point $m$ est remplacé par le point $m'$ qui lui est diamétralement opposé sur la sphère. On obtient (*fig.* 6) une nouvelle indicatrice sphérique, symétrique de la première par rapport au centre, et il est clair que les tangentes en $m$ et $m'$ ont *même direction* : d'ailleurs, d'après les conventions relatives au sens positif à prendre sur l'indicatrice, on voit sans peine que la demi-tangente positive en $m'$ aura *même sens* que la demi-tangente positive en $m$. Il en résulte que le vecteur $\frac{d\boldsymbol{t}}{d\sigma}$ est remplacé par un vecteur équipollent.

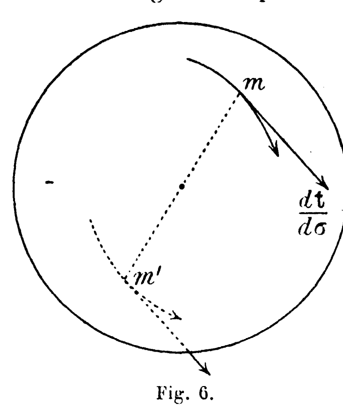


Fig. 6.

La droite menée par M (*fig.* 5) parallèlement à $\frac{d\boldsymbol{t}}{d\sigma}$ est la *normale principale* en M à $\Gamma$ : sur cette droite, le vecteur $\boldsymbol{n}$, de longueur *un*, équipollent à $\frac{d\boldsymbol{t}}{d\sigma}$, définit sans ambiguïté le sens positif de la normale principale [1].

**180.** Le vecteur

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n}$$

définit une direction appelée *binormale* en M. Supposons que l'on ait pris M comme origine des trois vecteurs unitaires $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$. On obtient ainsi un trièdre trirectangle direct de sommet M, qui porte le nom de *trièdre de* SERRET.

Le plan $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n})$ est appelé *plan osculateur*, le plan $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ *plan normal*, le plan $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{t})$ *plan rectifiant*.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les composantes des vecteurs $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$,

---

[1] Soit $s + \Delta s$ l'abscisse curviligne d'un point $M_1$ de $\Gamma$ voisin de $M(s)$. On aura (p. 70)

$$\mathbf{MM}_1 = \mathbf{M}_1(s+\Delta s) - \mathbf{M}(s) = \Delta s \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \frac{\Delta s^2}{2!}\left(\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2} + \alpha\right),$$

$\alpha$ étant infiniment petit avec $\Delta s$; donc le produit scalaire

$$\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2} \cdot \mathbf{MM}_1 = \frac{\Delta s^2}{2!}\left[\left(\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2}\right)^2 + \alpha \cdot \frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2}\right]$$

est toujours positif si $\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2} \neq 0$, pourvu que $M_1$ soit assez voisin de M. Le vecteur $\boldsymbol{n}$, faisant un angle aigu avec chaque petite corde $MM_1$, est donc dirigé dans la concavité de la courbe.

c'est-à-dire les cosinus directeurs des axes du trièdre de SERRET; puisque ce trièdre est direct, on sait que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

est égal à $+1$. On a d'ailleurs, d'après la définition même du produit vectoriel,

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{t}, \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n};$$

autrement dit un terme quelconque du déterminant $\Delta$ est égal au mineur correspondant. On peut donc, par exemple, écrire l'équation cartésienne du plan osculateur au point $M(x, y, z)$ sous l'une ou l'autre forme

$$\alpha''(X-x) + \beta''(Y-y) + \gamma''(Z-z) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

**181.** Soit $b$ l'extrémité d'un vecteur d'origine O équipollent à $\boldsymbol{b}$ (*fig.* 7). Quand M décrit $\Gamma$, $b$ décrit sur la sphère de centre O et de rayon *un* une courbe appelée indicatrice sphérique des binormales. On a, puisque $\boldsymbol{t}.\boldsymbol{b} = 0$,

$$\boldsymbol{b}.\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} + \boldsymbol{t}.\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = 0;$$

mais $\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$ est parallèle à la normale principale, donc on doit avoir

$$\boldsymbol{b}.\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = 0 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{t}.\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = 0.$$

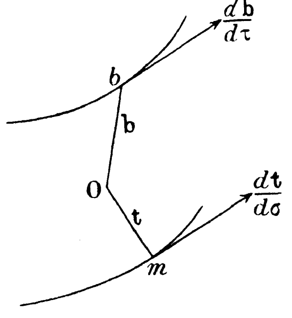



Fig. 7.

Des relations

$$(\boldsymbol{t})^2 = 1, \qquad (\boldsymbol{b})^2 = 1,$$

on tire d'ailleurs par dérivation

$$\boldsymbol{t}.\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = 0, \qquad \boldsymbol{b}.\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = 0.$$

Les vecteurs $\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$ et $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$, qui sont perpendiculaires aux deux vecteurs $\boldsymbol{t}$ et $\boldsymbol{b}$, sont donc parallèles; autrement dit, les tangentes aux deux indicatrices aux points correspondants sont parallèles. Nous choisirons comme sens positif sur l'indicatrice des binormales un sens tel que les demi-tangentes positives aux points correspondants des deux indicatrices soient de même sens; si l'on appelle $\tau$ la valeur algébrique de l'arc de l'indicatrice des binormales, on aura donc

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{d\sigma} = \frac{d\boldsymbol{b}}{d\tau}, \tag{2}$$

puisque ces deux vecteurs sont parallèles, de même sens, et de longueur 1.

**182.** Démontrons maintenant une propriété infinitésimale du plan osculateur. Soient $M(s)$ un point de $\Gamma$, $M_1(s+h)$ et $M_2(s+k)$ deux points de $\Gamma$ très voisins de $M$; ces trois points déterminent un plan P dont nous allons chercher la position limite quand $h$ et $k$ tendent vers zéro.

Les vecteurs $\frac{\mathbf{M}_1-\mathbf{M}}{h}=\mathbf{u}$ et $\frac{\mathbf{M}_2-\mathbf{M}}{k}=\mathbf{v}$ sont dans le plan P. Or on a

$$\mathbf{u}=\frac{d\mathbf{M}}{ds}+\frac{h}{2!}\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2}+\frac{h^2}{3!}\frac{d^3\mathbf{M}}{ds^3}+\dots,$$

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{M}}{ds}+\frac{k}{2!}\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2}+\frac{k^2}{3!}\frac{d^3\mathbf{M}}{ds^3}+\dots$$

et l'on voit d'abord que la position limite de P contiendra la tangente en M. Le vecteur $\mathbf{w}=\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{h-k}$ est aussi dans le plan P, et on a

$$\mathbf{w}=\frac{1}{2!}\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2}+\frac{1}{3!}\frac{h^2-k^2}{h-k}\frac{d^3\mathbf{M}}{ds^3}+\dots;$$

quand $h$ et $k$ tendent vers zéro, $\mathbf{w}$ tend vers $\frac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2}$ : donc la position limite de P contient aussi la normale principale, et se confond par suite avec le plan osculateur. On peut donc dire que le plan osculateur en M est déterminé par le point M et deux autres points de $\Gamma$ infiniment voisins de M.

## § II. — Courbure. Torsion. Formules de Frenet.

**183.** On donne au scalaire positif $\frac{ds}{d\sigma}$ qui figure dans la formule (1) le nom de *rayon de courbure* de la courbe $\Gamma$ au point M, et on le représente par R; l'inverse $\frac{1}{R}$ est dit *courbure* de la courbe. Soit I un point de la normale principale obtenu en portant à partir du point M et dans le sens positif une longueur égale à R : le point I est appelé *centre de courbure*. Enfin le cercle du plan osculateur qui a I pour centre et R pour rayon est dit *cercle de courbure*.

On tire de la formule (1)

$$\frac{1}{R}\frac{d\mathbf{t}}{d\sigma}=\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2},$$

et par suite

$$(3)\qquad \frac{1}{R^2}=\left(\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2}\right)^2=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2,$$

formule qui fait connaître la courbure sans ambiguïté, puisque R est essentiellement positif. On en déduit aisément que la courbure ne peut être constamment nulle que si la courbe $\Gamma$ se réduit à une droite, et réciproquement.

On donne au scalaire $\frac{ds}{d\tau}$ le nom de *rayon de torsion* en M, $\tau$ désignant toujours l'arc de l'indicatrice des binormales, et on représente ce scalaire par T;

l'inverse $\frac{1}{T}$ est dit *torsion* de la courbe. D'après la convention relative au sens positif sur l'indicatrice des binormales, on voit que, à la différence de la courbure, la torsion peut être positive ou négative. Toutefois, comme il n'y a pas de sens privilégié sur la binormale, il n'y a pas lieu de parler de centre de torsion.

**184.** Avec les notations employées jusqu'ici, et que nous conserverons toujours à moins d'indication contraire, on voit que la formule (1) s'écrit

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{1}{R}\frac{d\boldsymbol{t}}{d\sigma}=\frac{\boldsymbol{n}}{R},$$

relation vectorielle équivalente aux trois relations scalaires

$$(4)\qquad \frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha'}{R},\qquad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta'}{R},\qquad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma'}{R}.$$

La formule (2) donne de même

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{1}{T}\frac{d\boldsymbol{b}}{d\tau}=\frac{1}{T}\frac{d\boldsymbol{t}}{d\sigma}=\frac{\boldsymbol{n}}{T},$$

d'où

$$(5)\qquad \frac{d\alpha''}{ds}=\frac{\alpha'}{T},\qquad \frac{d\beta''}{ds}=\frac{\beta'}{T},\qquad \frac{d\gamma''}{ds}=\frac{\gamma'}{T}.$$

Enfin on a successivement

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{t},$$

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\boldsymbol{b}\wedge\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}+\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\wedge\boldsymbol{t},$$

$$=\frac{1}{R}\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{n}+\frac{1}{T}\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{t}=-\frac{\boldsymbol{t}}{R}-\frac{\boldsymbol{b}}{T},$$

c'est-à-dire

$$(6)\qquad \frac{d\alpha'}{ds}=-\frac{\alpha}{R}-\frac{\alpha''}{T},\qquad \frac{d\beta'}{ds}=-\frac{\beta}{R}-\frac{\beta''}{T},\qquad \frac{d\gamma'}{ds}=-\frac{\gamma}{R}-\frac{\gamma''}{T}.$$

Les formules (4), (5) et (6) sont les *formules de* FRENET. Avec les notations vectorielles, ces formules s'écrivent simplement

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{\boldsymbol{n}}{R},\qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{\boldsymbol{n}}{T},\qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\frac{\boldsymbol{t}}{R}-\frac{\boldsymbol{b}}{T}.$$

Pour calculer la torsion, nous partirons de la formule

$$\frac{\boldsymbol{n}}{T}=\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}.$$

Multipliant scalairement les deux membres par $\boldsymbol{n}$, on aura

$$\frac{1}{T}=\boldsymbol{n}.\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=R\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}.\frac{d\boldsymbol{b}}{ds};$$

d'ailleurs, de la relation

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\wedge\boldsymbol{n},$$

on tire

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\boldsymbol{t}\wedge\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}+\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\wedge\boldsymbol{n}=\boldsymbol{t}\wedge\frac{d\boldsymbol{n}}{ds},$$

et par suite (n° 177)

$$\frac{1}{T} = R\left(\frac{dt}{ds}, t, \frac{dn}{ds}\right).$$

On a d'autre part

$$n = R\frac{dt}{ds},$$

et par suite

$$\frac{dn}{ds} = \frac{dR}{ds}\frac{dt}{ds} + R\frac{d^2t}{ds^2};$$

on obtient donc, en définitive,

$$\frac{1}{T} = -R^2\left(t, \frac{dt}{ds}, \frac{d^2t}{ds^2}\right),$$

ou encore

$$(7) \qquad \frac{1}{T} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}}{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

Ainsi, à l'inverse de la courbure, la torsion a une expression rationnelle.

Il est facile de montrer que *les courbes planes ont une torsion nulle et réciproquement.* En effet, si une courbe est plane, on aura, en prenant son plan comme plan des $xy$, $z = 0$, et par suite le déterminant qui figure dans la formule (7) est nul. Inversement, si la torsion est nulle, on a [form. (5)] $\frac{db}{ds} = 0$, d'où $b = C^{te}$, et comme $b.t = b.\frac{dM}{ds} = 0$, on aura aussi $b.M = C^{te}$, c'est-à-dire

$$\alpha''x + \beta''y + \gamma''z = C^{te};$$

les coefficients $\alpha''$, $\beta''$ et $\gamma''$ étant constants, on voit bien que la courbe est plane.

**185.** Remarque. — Si le vecteur **M** est défini non plus en fonction de l'arc $s$ de $\Gamma$, mais en fonction d'un paramètre $t$ quelconque, les formules (3) et (7) qui donnent la courbure et la torsion ne sont plus immédiatement applicables.

Supposons que l'on ait $\frac{ds}{dt} = \varphi(t)$; on aura alors

$$\frac{dM}{dt} = \varphi\frac{dM}{ds}, \qquad \frac{d^2M}{dt^2} = \varphi^2\frac{d^2M}{ds^2} + \varphi'\frac{dM}{ds},$$
$$\frac{d^3M}{dt^3} = \varphi^3\frac{d^3M}{ds^3} + 3\varphi\varphi'\frac{d^2M}{ds^2} + \varphi''\frac{dM}{ds}.$$

On en tire

$$\frac{dM}{ds} = \frac{1}{\varphi}\frac{dM}{dt}, \qquad \frac{d^2M}{ds^2} = \frac{1}{\varphi^2}\frac{d^2M}{dt^2} + a\frac{dM}{dt},$$
$$\frac{d^3M}{ds^3} = \frac{1}{\varphi^3}\frac{d^3M}{dt^3} + b\frac{d^2M}{dt^2} + c\frac{dM}{dt},$$

$a$, $b$ et $c$ désignant des coefficients qu'il est inutile de calculer.

Reprenant d'abord la première formule de FRENET

$$\frac{\boldsymbol{n}}{R}=\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2},$$

et multipliant vectoriellement les deux membres par $\boldsymbol{t}$, on aura

$$\frac{1}{R}\boldsymbol{t}\wedge\boldsymbol{n}=\boldsymbol{t}\wedge\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2},$$

ou

$$\frac{\boldsymbol{b}}{R}=\frac{d\mathbf{M}}{ds}\wedge\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2}$$
$$=\frac{1}{\varphi^3}\frac{d\mathbf{M}}{dt}\wedge\frac{d^2\mathbf{M}}{dt^2},$$

d'où enfin, en élevant au carré,

$$\frac{1}{R^2}=\frac{dt^6}{ds^6}\left(\frac{d\mathbf{M}}{dt}\wedge\frac{d^2\mathbf{M}}{dt^2}\right)^2,$$

c'est-à-dire

$$(3')\quad \frac{1}{R^2}=\frac{(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2}{ds^6},$$

les différentielles étant prises par rapport à $t$.

On a d'autre part

$$\frac{1}{T}=-R^2\left(\frac{d\mathbf{M}}{ds},\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2},\frac{d^3\mathbf{M}}{ds^3}\right),$$

ce qu'on peut écrire, d'après les propriétés élémentaires des déterminants,

$$\frac{1}{T}=-R^2\frac{dt^6}{ds^6}\left(\frac{d\mathbf{M}}{dt},\frac{d^2\mathbf{M}}{dt^2},\frac{d^3\mathbf{M}}{dt^3}\right),$$

c'est-à-dire

$$(7')\quad \frac{1}{T}=-\frac{\begin{vmatrix} dx & dy & dz\\ d^2x & d^2y & d^2z\\ d^3x & d^3y & d^3z\end{vmatrix}}{(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2},$$

les différentielles étant toujours prises par rapport à $t$.

On obtient de même, pour l'équation du plan osculateur,

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z\\ dx & dy & dz\\ d^2x & d^2y & d^2z\end{vmatrix}=0.$$

## § III. — Applications diverses.

**186. Hélices.** — Considérons une courbe plane C, et un vecteur unitaire $\boldsymbol{u}$ perpendiculaire au plan de C; nous prendrons ce plan pour plan des $xy$, et nous supposerons que le vecteur $\boldsymbol{u}$ a même sens que le demi-axe O$z$.

Choisissons sur C un sens positif de parcours et une origine des arcs, et soit $\theta$ l'arc de la courbe. L'équation

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} + \boldsymbol{u}\rho(\theta),$$

où P est le point de C d'abscisse curviligne $\theta$, et $\rho$ une fonction quelconque de $\theta$, représente une courbe $\Gamma$ tracée sur le cylindre dont la courbe C est la section droite. Cherchons à déterminer la fonction $\rho$ de telle sorte que la courbe $\Gamma$ coupe sous un angle constant les génératrices du cylindre.

Soit $s$ l'arc de $\Gamma$; nous aurons

$$d\mathbf{M} = d\mathbf{P} + \boldsymbol{u}\rho' d\theta,$$

et par suite, en remarquant que $\boldsymbol{u}.d\mathbf{P} = 0$,

$$ds^2 = (1 + \rho'^2)\,d\theta^2,$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\rho'^2}}\left(\frac{d\mathbf{P}}{d\theta} + \rho'\boldsymbol{u}\right), \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

donc enfin

$$\boldsymbol{u}.\frac{d\mathbf{M}}{ds} = \frac{\varepsilon\rho'}{\sqrt{1+\rho'^2}}.$$

Le produit scalaire du premier membre représente le cosinus de l'angle sous lequel la courbe $\Gamma$ coupe les génératrices du cylindre; pour qu'il soit constant, il faut et il suffit que $\rho'$ soit une constante.

Comme on peut toujours, sans changer la courbe $\Gamma$, ajouter à $\rho$ une constante quelconque à condition de remplacer la courbe C par une autre section droite, nous prendrons $\rho = a\theta$, $a$ désignant une constante. La courbe

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} + \boldsymbol{u}a\theta$$

est appelée *hélice cylindrique*. En coordonnées cartésiennes rectangulaires, ses équations auront la forme

$$(8) \qquad x = f(\theta), \qquad y = g(\theta), \qquad z = a\theta,$$

les fonctions $f$ et $g$ étant assujetties à vérifier la relation

$$f'^2 + g'^2 = 1.$$

Nous choisirons comme sens positif sur la courbe $\Gamma$ un sens tel que $s$ croisse avec $\theta$; nous aurons donc

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{1+a^2},$$

et par suite

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left(\frac{d\mathbf{P}}{d\theta} + a\boldsymbol{u}\right).$$

Dérivons par rapport à $s$; il vient

$$\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2} = \frac{1}{1+a^2}\frac{d^2\mathbf{P}}{d\theta^2}.$$

Donc la normale principale en M à Γ est parallèle à la normale en P à C, et par suite orthogonale à $\boldsymbol{u}$. En particulier, si l'hélice est *circulaire*, c'est-à-dire tracée sur un cylindre de révolution, la normale principale en un point quelconque *rencontre* normalement l'axe du cylindre.

De la relation $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{t} = C^{te}$ on tire d'ailleurs par dérivation

$$\boldsymbol{u}.\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = 0, \qquad \text{donc} \qquad \boldsymbol{u}.\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = 0, \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{u}.\boldsymbol{b} = C^{te};$$

la binormale fait donc un angle constant avec le vecteur $\boldsymbol{u}$, ce qui résulte d'ailleurs immédiatement du fait que les trois vecteurs $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{t}$ et $\boldsymbol{b}$ sont coplanaires. Inversement, de la relation $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{b} = C^{te}$, on tire de même

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n} = 0, \qquad \boldsymbol{u}.\boldsymbol{t} = C^{te}.$$

Il en résulte que l'on peut prendre pour définition de l'hélice cylindrique l'une des trois propriétés suivantes :

1° la tangente fait un angle constant avec une direction fixe;

2° la normale principale est parallèle à un plan fixe;

3° le plan osculateur fait un angle constant avec une direction fixe.

Si l'on prend les équations cartésiennes de l'hélice sous la forme (8), le calcul de la courbure et celui de la torsion s'effectuent aisément de la façon suivante [1]. On a d'abord, avec les notations usuelles,

$$\alpha = \frac{f'}{\sqrt{1+a^2}}, \qquad \beta = \frac{g'}{\sqrt{1+a^2}}, \qquad \gamma = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}};$$

on en tire

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{f''}{1+a^2}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{g''}{1+a^2}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = 0,$$

et par suite

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{f''^2+g''^2}}{1+a^2}.$$

On a alors successivement

$$\alpha' = R\frac{d\alpha}{ds} = \frac{f''}{\sqrt{f''^2+g''^2}}, \qquad \beta' = \frac{g''}{\sqrt{f''^2+g''^2}}, \qquad \gamma' = 0,$$

$$\alpha'' = \beta\gamma' - \gamma\beta' = \frac{-ag''}{\sqrt{(1+a^2)(f''^2+g''^2)}}, \; \beta'' = \frac{af''}{\sqrt{(1+a^2)(f''^2+g''^2)}}, \; \gamma'' = \frac{f'g''-f''g'}{\sqrt{(1+a^2)(f''^2+g''^2)}}.$$

D'après ce que nous avons vu, $\gamma''$ doit se réduire à une constante. On a en effet

$$f'^2 + g'^2 = 1, \qquad f'f'' + g'g'' = 0,$$

d'où

$$\frac{f''}{g'} = -\frac{g''}{f'} = \varepsilon\sqrt{f''^2+g''^2},$$

---

[1] Remarquons que cette méthode s'applique à toute courbe gauche.

$\varepsilon$ ayant le signe de $f''g'$. On en tire

$$f'g''-f''g'=-\varepsilon\sqrt{f''^2+g''^2}$$

et par suite
$$\gamma''=\frac{-\varepsilon}{\sqrt{1+a^2}}.$$

La dernière formule de Frenet donne alors

$$\frac{R}{T}=-\frac{\gamma}{\gamma''}=\varepsilon a,$$

et par suite
$$\frac{1}{T}=\frac{\varepsilon a}{1+a^2}\sqrt{f''^2+g''^2}.$$

Le signe de $\varepsilon$ a une signification intrinsèque évidente. Supposons, pour préciser, $a>0$; alors $\varepsilon$ est de signe contraire à $\gamma\gamma''$ : il est donc négatif si les angles $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})$ et $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b})$, comptés entre 0 et $\pi$, sont tous deux aigus ou tous deux obtus, positif dans le cas contraire. Il est clair que cette propriété des angles $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})$ et $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b})$ est indépendante du sens positif adopté sur $\Gamma$, un changement d'orientation ayant pour résultat de remplacer ces angles par leurs suppléments.

Nous avons, chemin faisant, établi la relation $\frac{R}{T}=\varepsilon a$, donc tout le long de l'hélice le rapport de la courbure à la torsion reste constant.

La réciproque est vraie :

*Toute courbe dont la courbure et la torsion sont dans un rapport constant est une hélice* (J. Bertrand).

En effet, on a par hypothèse $\frac{R}{T}=\frac{d\tau}{d\sigma}=k$; la relation $\frac{d\boldsymbol{b}}{d\tau}=\frac{d\boldsymbol{t}}{d\sigma}$ s'écrit donc $d\boldsymbol{b}=kd\boldsymbol{t}$; intégrons : on aura, en désignant par $\boldsymbol{u}$ un vecteur constant,

$$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{t}-\boldsymbol{u}.$$

Multipliant scalairement les deux membres par $\boldsymbol{t}$, on aura enfin

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{t}=k,$$

équation qui exprime que la tangente à la courbe fait un angle constant avec une direction fixe.

Remarque. — Désignons par $\frac{1}{\rho}$ la courbure de la section droite C. Nous aurons alors

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{f''^2+g''^2},$$

$$R=\rho(1+a^2),\qquad T=-\varepsilon\rho\frac{1+a^2}{a};$$

ainsi la courbure et la torsion de l'hélice varient proportionnellement à la courbure de la section plane. En particulier, pour toute hélice tracée sur un cylindre de révolution, la courbure et la torsion sont constantes.

Inversement toute courbe à courbure et torsion constantes est une hélice.

d'après le théorème de BERTRAND, et cette hélice appartient à un cylindre de révolution, puisque la courbure de la section droite est constante.

**187.** D'après ce que nous venons de voir, la normale principale à une hélice tracée sur un cylindre de révolution coupe à angle droit l'axe du cylindre, et on peut dire que le plan rectifiant passe constamment par un point fixe, le point à l'infini sur l'axe.

Plus généralement,

*Si la normale principale d'une courbe C coupe sous un angle constant $\varphi$ une droite fixe $\Delta$, le plan rectifiant en tout point de C passe par un point fixe de $\Delta$.*

(*Rennes, épreuve pratique.*)

A
M
$\lambda_2 n$
C
u
O
$\Delta$

Fig. 8.

Soit O un point fixe pris sur $\Delta$, $\boldsymbol{u}$ un vecteur de longueur 1 porté par $\Delta$ et orienté de telle sorte que l'on ait, avec les notations habituelles,

$$(9) \qquad \boldsymbol{u}.\boldsymbol{n} = \cos\varphi.$$

On aura d'ailleurs, en désignant par $\lambda_1$ et $\lambda_2$ des fonctions scalaires de $s$ convenablement choisies,

$$(10) \qquad \mathbf{M} = \lambda_1 \boldsymbol{u} + \lambda_2 \boldsymbol{n}.$$

Soit A le point où le plan rectifiant en M coupe $\Delta$; on pourra poser

$$\mathbf{A} = a\boldsymbol{u},$$

d'où

$$(\mathbf{A} - \mathbf{M}).\boldsymbol{n} = \mathbf{MA}.\boldsymbol{n} = 0,$$

ou encore

$$[(a - \lambda_1)\boldsymbol{u} - \lambda_2 \boldsymbol{n}].\boldsymbol{n} = (a - \lambda_1)\cos\varphi - \lambda_2 = 0$$

et enfin

$$a\cos\varphi = \lambda_1 \cos\varphi + \lambda_2.$$

D'autre part, on a, en dérivant (10),

$$\boldsymbol{t} = \frac{d\lambda_1}{ds}\boldsymbol{u} + \lambda_2 \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} + \frac{d\lambda_2}{ds}\boldsymbol{n}.$$

Multiplions scalairement par $\boldsymbol{n}$ en tenant compte de (9); nous aurons, puisque

$$\boldsymbol{t}.\boldsymbol{n} = 0, \qquad (\boldsymbol{n})^2 = 1, \qquad \boldsymbol{n}.\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = 0,$$

$$\frac{d\lambda_1}{ds}\cos\varphi + \frac{d\lambda_2}{ds} = 0,$$

d'où

$$\frac{da}{ds} = 0, \qquad a = C^{te}.$$

Le plan rectifiant coupe donc bien $\Delta$ en un point fixe A. La droite AM faisant avec $\Delta$ l'angle $\frac{\pi}{2} - \varphi$, on voit que la courbe C est tracée sur un cône de révolution $\Sigma$ d'axe $\Delta$ et de sommet A.

Toute courbe tracée sur une surface et telle que sa normale principale en chaque point soit normale à la surface en ce point est appelée *ligne géodésique* de la surface considérée. Le plan rectifiant en M étant tangent au cône $\Sigma$ le long de AM, on voit que la courbe C est une géodésique du cône $\Sigma$.

**188. Courbes de Bertrand.** — Considérons, pour donner une dernière application, une courbe quelconque C, un point M de cette courbe, et un point $M_1$ de la normale principale en M; on aura, avec les notations habituelles,

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M} + \boldsymbol{n}\rho(s). \tag{11}$$

Quand M décrit C, $M_1$ décrit une certaine courbe $C_1$; nous allons chercher s'il est possible de déterminer la fonction $\rho(s)$ de telle sorte que la courbe $C_1$ ait en chaque point $M_1$ la droite $MM_1$ comme normale principale. D'une façon générale nous affecterons de l'indice 1 les éléments géométriques relatifs à la courbe $C_1$; l'arc $s_1$ de cette courbe sera une certaine fonction de $s$, $s_1 = \theta(s)$.

Supposons d'abord qu'il existe une telle courbe $C_1$; nous aurons, en dérivant l'équation (11) par rapport à $s$,

$$\boldsymbol{t}_1\theta'(s) = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{n}\rho' + \rho\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \boldsymbol{t}\left(1 - \frac{\rho}{R}\right) + \boldsymbol{n}\rho' - \boldsymbol{b}\frac{\rho}{T},$$

d'où, en multipliant scalairement les deux membres par $\boldsymbol{n} = \pm \boldsymbol{n}_1$, $\rho' = 0$; la fonction $\rho$ se réduit donc à une constante, et l'on a

$$\boldsymbol{t}_1 = \frac{\boldsymbol{t}}{\theta'}\left(1 - \frac{\rho}{R}\right) - \boldsymbol{b}\frac{\rho}{T\theta'}. \tag{12}$$

En dérivant une seconde fois par rapport à $s$, on aura

$$\boldsymbol{n}_1\frac{\theta'}{R_1} = \boldsymbol{t}\frac{d}{ds}\frac{1}{\theta'}\left(1 - \frac{\rho}{R}\right) - \boldsymbol{b}\frac{d}{ds}\frac{\rho}{T\theta'} + \boldsymbol{n}\left(\frac{R-\rho}{R^2\theta'} - \frac{\rho}{T^2\theta'}\right);$$

on devra donc avoir nécessairement

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{\theta'}\left(1 - \frac{\rho}{R}\right) = 0, \qquad \frac{d}{ds}\frac{\rho}{T\theta'} = 0, \tag{13}$$

d'où, en désignant par $\lambda$ et $\mu$ deux constantes quelconques,

$$1 - \frac{\rho}{R} = \lambda\theta', \qquad \frac{\rho}{T} = \mu\theta'$$

et enfin

$$\mu\left(1 - \frac{\rho}{R}\right) - \lambda\frac{\rho}{T} = 0,$$

ce qui montre que sur la courbe C la courbure et la torsion vérifient une relation linéaire à coefficients constants.

Inversement, supposons que sur la courbe C la courbure et la torsion vérifient une relation linéaire à coefficients constants,

$$\frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{T} + \gamma = 0, \tag{14}$$

les coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ n'étant pas tous trois nuls, et cherchons s'il est possible de déterminer le scalaire *constant* $\rho$ de telle sorte que la courbe $C_1$ possède la propriété indiquée. Il faut pour cela et il suffit que l'on puisse trouver une fonction $\theta'(s)$ vérifiant les équations (13), et telle en outre, d'après (12), que

$$\theta'^2 = \left(1 - \frac{\rho}{R}\right)^2 + \frac{\rho^2}{T^2}. \tag{15}$$

Si la courbe C est plane, c'est-à-dire si la relation (14) se réduit à $\frac{1}{T} = 0$, l'équation (15) donne

$$\theta' = \pm\left(1 - \frac{\rho}{R}\right)$$

et les deux équations (13) sont vérifiées quel que soit $\rho$. Dans ce cas, d'ailleurs bien connu, on peut prendre pour courbe $C_1$ l'une quelconque des trajectoires orthogonales des normales à la courbe C.

Ce cas écarté, supposons que l'on ait, dans la relation (14), $\gamma = 0$ ; alors $\alpha$ et $\beta$ sont différents de zéro, le rapport $\frac{R}{T}$ est constant, et la courbe C est une hélice. Posons $\frac{R}{T} = \operatorname{tg} \omega$, ou

$$(16) \qquad \frac{1}{R} = u \cos \omega, \qquad \frac{1}{T} = u \sin \omega ;$$

la relation (15) permet d'écrire

$$(17) \qquad 1 - \frac{\rho}{R} = \theta' \sin \varphi, \qquad \frac{\rho}{T} = \theta' \cos \varphi,$$

et, d'après (13), l'angle $\varphi$ doit être constant. Éliminons R, T et $\theta'$ entre les équations (16) et (17) ; il reste

$$u = \frac{\cos \varphi}{\rho \cos(\omega - \varphi)}.$$

Ainsi, $u$ étant constant, il en est de même de R et T, et par suite la courbe C est une hélice *circulaire*. Si l'on prend pour $\rho$ une valeur constante quelconque, les équations (17) définissent $\theta'$ et $\varphi$, et les équations (13) sont vérifiées. Le problème a encore dans ce cas une infinité de solutions : on peut prendre pour courbe $C_1$ l'une quelconque des trajectoires orthogonales des normales principales de la courbe C.

Enfin supposons $\gamma \neq 0$ ; on peut alors prendre $\gamma = 1$, et la relation (14) s'écrit

$$\frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{T} + 1 = 0.$$

On tire d'ailleurs des équations (17)

$$\left(1 - \frac{\rho}{R}\right) \cos \varphi = \frac{\rho}{T} \sin \varphi.$$

Si les deux équations précédentes n'étaient pas équivalentes, elles détermineraient $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{T}$, et l'on retomberait sur le cas de l'hélice circulaire, ou elles seraient incompatibles et le problème n'aurait pas de solution. Pour qu'elles soient équivalentes, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\cos \varphi}{1} = \frac{-\rho \cos \varphi}{\alpha} = \frac{-\rho \sin \varphi}{\beta},$$

ou

$$\rho = -\alpha \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Dans ce cas le problème a une solution *unique*, savoir la courbe $C_1$ définie par l'équation

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M} - \alpha n.$$

Les deux courbes C et $C_1$ sont appelées *courbes de* BERTRAND ; elles se correspondent point par point de telle sorte que la distance de deux points correspondants, M et $M_1$, soit constante, et que la droite qui les joint soit la normale principale en ces points aux courbes considérées.

On tire d'ailleurs des formules (12) et (17)

$$\boldsymbol{t}.\boldsymbol{t}_1 = \sin \varphi,$$

ce qui montre que les tangentes en deux points correspondants font un angle constant.

## CHAPITRE III

# SURFACES RÉGLÉES. SURFACES DÉVELOPPABLES

### § I. — Généralités sur les surfaces.

**189.** Toute équation de la forme $F(x, y, z) = 0$ représente une surface dans l'espace à trois dimensions. Si l'équation est résolue par rapport à $z$, $z = f(x, y)$, on désigne par $p$ et $q$ les dérivées partielles de $f(x, y)$; le plan tangent au point $(x, y, z)$ a alors pour équation, comme on sait,

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0.$$

Dans le cas de l'équation non résolue, l'équation du plan tangent s'écrit

$$(X - x)F'_x + (Y - y)F'_y + (Z - z)F'_z = 0.$$

De même, la normale à la surface en M a pour équations suivant les cas

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}$$

ou

$$\frac{X - x}{F'_x} = \frac{Y - y}{F'_y} = \frac{Z - z}{F'_z}.$$

Rappelons encore que le plan tangent en M contient les tangentes en M à toutes les courbes de la surface qui passent au point M : il est donc déterminé par deux de ces tangentes.

**190.** Nous continuerons de représenter par **M** le vecteur **OM**. Supposons que **M** dépende des valeurs numériques de deux paramètres $u$ et $v$ : quand $u$ et $v$ prendront toutes les valeurs possibles, le point M décrira en général une surface S. Les coordonnées $x$, $y$, $z$ de M sont en effet des fonctions de $u$ et $v$.

(1) $$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v),$$

et, en éliminant $u$ et $v$ entre ces trois équations, on a en général une relation et une seule telle que $F(x, y, z) = 0$.

On donne aux paramètres $u$ et $v$ le nom de *coordonnées curvilignes*. A tout système de valeurs de $u$ et $v$ correspond un point M de S, et réciproquement. Si l'on établit entre $u$ et $v$ une relation quelconque, le vecteur **M** devient

fonction d'une variable, et le point M décrit une courbe de S; donc toute relation entre $u$ et $v$ définit une courbe tracée sur S. En particulier, les courbes $u = C^{te}$, $v = C^{te}$ sont appelées *courbes coordonnées*.

Soient $M(x, y, z)$ un point de S, $P(X, Y, Z)$ un point du plan tangent en M, enfin $M_1$ et $M_2$ deux points de S infiniment voisins de M et situés respectivement sur chacune des courbes coordonnées qui passent en M; on aura

$$\mathbf{MM}_1 = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} du, \qquad \mathbf{MM}_2 = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} dv.$$

Les vecteurs $\mathbf{MM}_1$, $\mathbf{MM}_2$ et $\mathbf{MP}$ étant coplanaires, on aura (nº 177)

$$\left(\mathbf{MP}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0;$$

c'est l'équation du plan tangent (nº 85).

Introduisons les déterminants fonctionnels

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \qquad B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \qquad C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)};$$

on aura alors l'équation du plan tangent sous la forme

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0.$$

Les équations de la normale s'écriront de même

$$\frac{X - x}{A} = \frac{Y - y}{B} = \frac{Z - z}{C}.$$

## § II. — Surfaces réglées, théorème de Chasles; ligne de striction.

**191.** Considérons la surface S définie par l'équation vectorielle

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{M} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}u,$$

les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ ne dépendant que du paramètre $v$. Si on donne à $v$ une valeur constante, le point M décrit évidemment, quand $u$ varie, une droite parallèle au vecteur $\boldsymbol{b}$ : une famille de courbes coordonnées, $v = C^{te}$, se compose donc de droites, et la surface S est ***réglée***.

L'équation du plan tangent s'écrit (nº 190)

$$\text{(3)} \qquad \left(\mathbf{MP}, \boldsymbol{b}, \frac{d\boldsymbol{a}}{dv} + u\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right) = 0.$$

Si P appartient à la génératrice rectiligne qui passe en M, on a $\mathbf{MP} = \rho\boldsymbol{b}$, et l'équation (3) est vérifiée, ce qui montre que le plan tangent en M contient la génératrice rectiligne qui passe par ce point.

L'équation (3) pouvant s'écrire (n° 177)

$$\mathbf{MP}.\left[\boldsymbol{b} \wedge \left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dv} + u\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right)\right] = 0,$$

on voit que la normale en M est parallèle au vecteur

$$\boldsymbol{b} \wedge \left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dv} + u\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right) = \boldsymbol{b} \wedge \frac{d\boldsymbol{a}}{dv} + u\boldsymbol{b} \wedge \frac{d\boldsymbol{b}}{dv}; \tag{4}$$

pour que la normale soit la même tout le long de la génératrice rectiligne issue de M, il faut et il suffit que le vecteur (4) ait une direction indépendante de $u$, donc que les vecteurs $\boldsymbol{b} \wedge \frac{d\boldsymbol{a}}{dv}$ et $\boldsymbol{b} \wedge \frac{d\boldsymbol{b}}{dv}$ soient colinéaires, par suite que les vecteurs $\boldsymbol{b}$, $\frac{d\boldsymbol{a}}{dv}$ et $\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}$ soient perpendiculaires à une même direction, c'est-à-dire coplanaires, ce qui s'exprime par la relation

$$\left(\boldsymbol{b}, \frac{d\boldsymbol{a}}{dv}, \frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right) = 0. \tag{5}$$

On dit dans ce cas que la surface réglée est *développable* : le plan tangent est alors invariable le long d'une génératrice quelconque.

Nous étudierons seulement dans ce paragraphe les surfaces réglées non développables, qui sont appelées surfaces *gauches*. Pour une telle surface, quand le point M décrit une génératrice $\Delta$, le plan tangent en M tourne autour de $\Delta$.

Quand le point M s'éloigne à l'infini sur $\Delta$, la normale à la surface réglée devient parallèle au vecteur $\boldsymbol{b} \wedge \frac{d\boldsymbol{b}}{dv}$; le plan tangent correspondant est appelé plan *asymptote*. Le point de $\Delta$ où le plan tangent est perpendiculaire au plan asymptote prend le nom de *point central* de $\Delta$; l'argument $u$ du point central est donc donné par l'équation

$$\left(\boldsymbol{b} \wedge \frac{d\boldsymbol{a}}{dv} + u\boldsymbol{b} \wedge \frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right) \cdot \left(\boldsymbol{b} \wedge \frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right) = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\left(\boldsymbol{b} \wedge \frac{d\boldsymbol{a}}{dv}\right) \cdot \left(\boldsymbol{b} \wedge \frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right) + u\left(\boldsymbol{b} \wedge \frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right)^2 = 0. \tag{6}$$

Pour simplifier cette équation, observons que l'on peut, sans nuire à la généralité, supposer que le vecteur $\boldsymbol{b}$ est de longueur 1. On a alors

$$(\boldsymbol{b})^2 = 1, \qquad \boldsymbol{b} \cdot \frac{d\boldsymbol{b}}{dv} = 0, \tag{7}$$

et ces relations, jointes à l'identité de Lagrange généralisée, donnent

$$\left(\boldsymbol{b} \wedge \frac{d\boldsymbol{a}}{dv}\right) \cdot \left(\boldsymbol{b} \wedge \frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dv} \cdot \frac{d\boldsymbol{b}}{dv},$$

$$\left(\boldsymbol{b} \wedge \frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right)^2 = \left(\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right)^2.$$

L'équation (6) prend alors la forme simple

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dv}+u\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right)=0. \tag{8}$$

Le lieu des points centraux est appelé *ligne de striction* de la surface réglée; l'équation (8) représente donc, dans l'hypothèse $(\boldsymbol{b})^2=1$, la ligne de striction de la surface définie par l'équation (2).

**192**. Conservons les hypothèses (7) et supposons en outre que nous ayons paramétré la surface réglée de telle sorte que la courbe $u=0$ soit la ligne de striction, ce qui exige, d'après l'équation (8),

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dv}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}=0.$$

Soient $M_0$ un point de la ligne de striction, M un point situé sur la génératrice qui passe en $M_0$; alors $u$ représente la valeur algébrique du segment $M_0M$ sur la génératrice orientée positivement dans le sens de $\boldsymbol{b}$. De plus le vecteur $\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}$ étant, par hypothèse, perpendiculaire aux vecteurs $\boldsymbol{b}$ et $\frac{d\boldsymbol{a}}{dv}$, on aura

$$\boldsymbol{b}\wedge\frac{d\boldsymbol{a}}{dv}=\lambda\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}, \tag{9}$$

$\lambda$ désignant un scalaire convenablement choisi.

Les normales en $M_0$ et M à la surface sont respectivement parallèles aux vecteurs

$$\boldsymbol{b}\wedge\frac{d\boldsymbol{a}}{dv} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{b}\wedge\frac{d\boldsymbol{a}}{dv}+u\boldsymbol{b}\wedge\frac{d\boldsymbol{b}}{dv};$$

soient $\mathbf{M_0N_0}$ et $\mathbf{MN}$ des vecteurs équipollents aux deux vecteurs précédents, $l_0$ et $l$ leurs longueurs, enfin $\theta$ leur angle compris entre $-\pi$ et $+\pi$, compté positivement à partir de $\mathbf{M_0N_0}$ dans le sens direct autour de $\boldsymbol{b}$; $\theta$ est aussi l'angle des plans tangents en $M_0$ et M.

On aura d'abord

$$\mathbf{M_0N_0}.\mathbf{MN}=l_0 l\cos\theta=\lambda\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\cdot\left(\lambda\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}+u\boldsymbol{b}\wedge\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right)=\lambda^2\left(\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right)^2;$$

la valeur de $\cos\theta$ est donc toujours positive, et $\theta$ reste compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. D'autre part, le vecteur $\boldsymbol{b}$ étant perpendiculaire à $\mathbf{M_0N_0}$ et $\mathbf{MN}$ et de longueur 1, on a, d'après la définition même du produit vectoriel,

$$\boldsymbol{b}l_0 l\sin\theta=\mathbf{M_0N_0}\wedge\mathbf{MN}=\lambda\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\wedge\left(\lambda\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}+u\boldsymbol{b}\wedge\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right)=\lambda u\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\wedge\left(\boldsymbol{b}\wedge\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right),$$

c'est-à-dire, d'après une formule signalée au n° 177,

$$\boldsymbol{b}l_0 l\sin\theta=\lambda u\left(\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right)^2\boldsymbol{b},$$

ou enfin

$$l_0 l\sin\theta=\lambda u\left(\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right)^2.$$

On en tire
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u}{\lambda}.$$

On peut donc énoncer la loi suivante :

*Le plan tangent à une surface réglée en un point d'une génératrice donnée $\Delta$ fait avec le plan tangent au point central de $\Delta$ un angle dont la tangente trigonométrique est proportionnelle à la distance du point central au point de contact* (loi de CHASLES).

Le coefficient de proportionnalité $\frac{1}{\lambda}$ a reçu le nom de *paramètre de distribution.* Sa valeur se tire immédiatement de la formule (9), dont on multiplie scalairement les deux membres par $\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}$; on a ainsi

$$\lambda = \frac{\left(\boldsymbol{b}, \frac{d\boldsymbol{a}}{dv}, \frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right)}{\left(\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right)^2},$$

d'où
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\left(\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right)^2}{\left(\boldsymbol{b}, \frac{d\boldsymbol{a}}{dv}, \frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right)} u.$$

**193**. En coordonnées cartésiennes, il est commode de prendre les équations de la surface sous la forme

$$(10) \qquad x = a_1 + b_1 u, \qquad y = a_2 + b_2 u, \qquad z = u,$$

ce qui est toujours possible, on s'en assure sans peine. Les coefficients $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ sont des fonctions d'un paramètre $v$; on désignera par des accents les dérivées relatives à $v$. On aura alors, pour les coefficients directeurs de la normale,

$$A = -a_2' - b_2' u, \qquad B = a_1' + b_1' u, \qquad C = -b_1 A - b_2 B,$$

de telle sorte que l'équation du plan tangent s'écrit

$$A(X - b_1 Z - a_1) + B(Y - b_2 Z - a_2) = 0;$$

en particulier, on a, pour l'équation du plan asymptote,

$$b_2' X - b_1' Y + (b_2 b_1' - b_1 b_2') Z + a_2 b_1' - a_1 b_2' = 0,$$

et on en déduit aisément l'équation de la ligne de striction.

Quand on fait varier $u$, en laissant $v$ constant, le plan tangent tourne bien autour de la génératrice G,

$$X = a_1 + b_1 Z, \qquad Y = a_2 + b_2 Z,$$

et sa position ne dépend que du rapport $\frac{B}{A} = -\frac{a_1' + b_1' u}{a_2' + b_2' u}$.

Ce rapport est une fonction homographique de $u$, c'est-à-dire de $z$. Il en résulte que tout plan passant par G est tangent à la surface en un point de G,

et que le rapport anharmonique de quatre plans tangents passant par G est égal au rapport anharmonique des quatre points de contact.

Considérons deux surfaces réglées ayant en commun une génératrice G. A chaque plan passant par G correspondent les deux points M′ et M″ où le plan touche les deux surfaces, et il est clair que les points M′ et M″ engendrent sur G deux divisions en correspondance homographique. Une homographie n'ayant que deux points doubles, sauf le cas où les deux divisions coïncident, on voit que les deux surfaces ont même plan tangent en deux points de G seulement, à moins qu'elles ne se raccordent tout le long de G.

Tout ce qui précède suppose que le rapport $\frac{B}{A}$ dépend réellement de $u$, sinon le plan tangent est le même tout le long de la génératrice G ; si cela se produit pour toutes les génératrices, la surface est développable. La condition nécessaire et suffisante pour que la surface (10) soit développable s'écrit donc

$$a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1 = 0,$$

ce qu'on déduit d'ailleurs immédiatement de la relation (5).

## § III. — Surface développable, arête de rebroussement.

**194.** Reprenons la surface réglée S définie par l'équation

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}u. \tag{2}$$

Nous avons vu que la condition nécessaire et suffisante pour que cette surface soit développable s'écrit

$$\left(\boldsymbol{b}, \frac{d\boldsymbol{a}}{dv}, \frac{d\boldsymbol{b}}{dv}\right) = 0.$$

Une courbe quelconque de la surface S est définie par une relation entre $u$ et $v$. Cherchons en particulier s'il existe une courbe tangente à toutes les génératrices rectilignes : on doit pouvoir, dans l'affirmative, prendre pour $u$ une fonction de $v$ telle que l'équation (2) définisse une courbe dont la tangente soit parallèle au vecteur $\boldsymbol{b}$. Comme on a alors

$$\frac{d\mathbf{M}}{dv} = \frac{d\boldsymbol{a}}{dv} + u\frac{d\boldsymbol{b}}{dv} + \boldsymbol{b}\frac{du}{dv},$$

on devra pouvoir choisir un scalaire $\rho$ tel que l'on ait

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dv} + u\frac{d\boldsymbol{b}}{dv} + \rho\boldsymbol{b} = 0. \tag{11}$$

Cette dernière équation exprime que les vecteurs $\boldsymbol{b}$, $\frac{d\boldsymbol{a}}{dv}$ et $\frac{d\boldsymbol{b}}{dv}$ sont coplanaires, donc que la surface S est développable. Inversement, si la surface S

est développable, on aura, en désignant par $\alpha_1(v)$, $\alpha_2(v)$ et $\alpha_3(v)$ des scalaires convenablement choisis, non tous nuls,

$$\alpha_1 \frac{d\mathbf{a}}{dv} + \alpha_2 \frac{d\mathbf{b}}{dv} + \alpha_3 \mathbf{b} = 0. \tag{12}$$

Si $\mathbf{b}$ est un vecteur unitaire, $\mathbf{b}$ et $\frac{d\mathbf{b}}{dv}$ sont orthogonaux. Dans l'hypothèse $\alpha_1 = 0$, la relation (12) exprime que ces vecteurs sont colinéaires, ce qui exige $\frac{d\mathbf{b}}{dv} = 0$. Le vecteur $\mathbf{b}$ est alors invariable, et la surface développable est un cylindre.

Ce cas écarté, considérons la courbe $\Gamma$ de S définie par l'équation

$$\frac{d\mathbf{b}}{dv} \cdot \left(\frac{d\mathbf{a}}{dv} + u \frac{d\mathbf{b}}{dv}\right) = 0; \tag{8}$$

cette équation peut s'écrire

$$\frac{d\mathbf{b}}{dv} \cdot \left[\left(u - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\frac{d\mathbf{b}}{dv} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\mathbf{b}\right] = 0,$$

et l'on en tire

$$u = \frac{\alpha_2(v)}{\alpha_1(v)};$$

en tout point M de $\Gamma$ on aura par suite d'après (12)

$$\frac{d\mathbf{M}}{dv} = \frac{d\mathbf{a}}{dv} + u \frac{d\mathbf{b}}{dv} + \mathbf{b}\frac{du}{dv} = \left(\frac{du}{dv} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)\mathbf{b}.$$

La courbe $\Gamma$ est donc tangente en chacun de ses points à la génératrice rectiligne qui passe en ce point. On lui donne le nom d'*arête de rebroussement* de la développable [1].

On voit que la même équation (8) représente, sur la surface réglée définie par l'équation (2) où l'on suppose $(\mathbf{b})^2 = 1$, la ligne de striction s'il s'agit d'une surface gauche et l'arête de rebroussement s'il s'agit d'une développable.

Si la surface développable est donnée, en coordonnées cartésiennes, par les équations (10), la condition (5), qui s'écrit

$$\begin{vmatrix} b_1 & \frac{da_1}{dv} & \frac{db_1}{dv} \\ b_2 & \frac{da_2}{dv} & \frac{db_2}{dv} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

montre qu'on doit prendre, dans la relation (12), $\alpha_3 = 0$. L'équation (11), qui définit l'arête de rebroussement, se réduit alors à l'équation

$$\frac{d\mathbf{a}}{dv} + u \frac{d\mathbf{b}}{dv} = 0,$$

---

[1] La développable est partagée par $\Gamma$ en deux régions, l'une engendrée par les demi-tangentes positives, l'autre par les demi-tangentes négatives à $\Gamma$. On vérifiera aisément qu'un plan normal à $\Gamma$ coupe la développable suivant une courbe ayant sur $\Gamma$ un point de rebroussement.

Dans le cas où la courbe $\Gamma$ est plane et convexe, on peut se représenter la développable comme formée de deux feuillets plans superposés recouvrant la région de convexité de la courbe.

laquelle se décompose en deux équations scalaires compatibles

$$da_1 + u db_1 = 0, \qquad da_2 + u db_2 = 0.$$

Il est facile de montrer que la surface réglée engendrée par les normales principales à une courbe *gauche* n'est pas développable. Soit en effet $a$ un point variable sur une courbe gauche $\Gamma$ d'arc $s$ ; la vecteur $\mathbf{a}$ est une certaine fonction de $s$, et la surface réglée formée par les normales principales a pour équation

$$\mathbf{M} = \mathbf{a} + u \frac{d^2\mathbf{a}}{ds^2},$$

les coordonnées curvilignes étant ici $u$ et $s$. Pour qu'elle fût développable, il faudrait qu'on eût, d'après (5),

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{a}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{a}}{ds^3}\right) = 0,$$

c'est-à-dire (nº 184) que la courbe $\Gamma$ fût plane. Donc les normales principales à une courbe gauche forment une surface réglée gauche.

On verrait aisément qu'il en est de même de la surface réglée engendrée par les binormales.

## § IV. — Développées. Développantes.

**195.** D'après ce que nous venons de voir, les tangentes à une courbe gauche C ne peuvent jamais être les normales *principales* d'une autre courbe *gauche*. Mais il peut arriver que les tangentes à C coupent normalement une autre courbe gauche $\Gamma$ : on dit dans ce cas que $\Gamma$ est une *développante* de C.

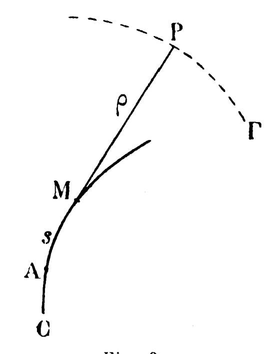


Fig. 9.

Soit $\Delta$ la développable qui a la courbe C pour arête de rebroussement. Il est clair qu'on obtiendra toutes les développantes de C en cherchant les courbes de $\Delta$ qui sont les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes.

Soient $s$ l'arc de C, compté à partir d'un point fixe A, M($s$) un point variable sur C, enfin P un point pris sur la tangente en M à C. Posons $\mathbf{MP} = \rho \boldsymbol{t}$; pour que P décrive une développante de C, il faudra choisir $\rho$ en fonction de $s$ de telle sorte que la tangente en P à la courbe $\Gamma$ décrite par P (*fig.* 9) soit perpendiculaire à MP. Or on a

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} + \rho \frac{d\mathbf{M}}{ds},$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{ds} = \left(1 + \frac{d\rho}{ds}\right)\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \rho \frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2},$$

et la condition d'orthogonalité,

$$\frac{d\mathbf{P}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{M}}{ds} = 0,$$

s'écrit, toutes réductions faites, $d\rho + ds = 0$.

On retrouve donc la même relation que celle qui caractérise les développantes des courbes planes, avec une interprétation géométrique identique.

**196.** Soit $\Gamma$ une développante de C. Inversement, C est dite une développée de $\Gamma$. Pour obtenir une développée de $\Gamma$, on voit qu'il faut associer, suivant une loi convenable, les normales à $\Gamma$ de façon à obtenir une surface développable $\Delta$ : l'arête de rebroussement de $\Delta$ sera une développée de $\Gamma$.

Avant de passer à la recherche des développées d'une courbe gauche, définissons un nouvel élément géométrique. Soit K (*fig.* 10) le centre de courbure d'une courbe $\Gamma$ au point M; par le point K menons une droite D parallèle à la binormale : cette droite D est appelée *droite polaire*. Quand le point M décrit la courbe $\Gamma$, D engendre une surface réglée, appelée *surface polaire*; on vérifiera aisément que c'est une surface développable[1].

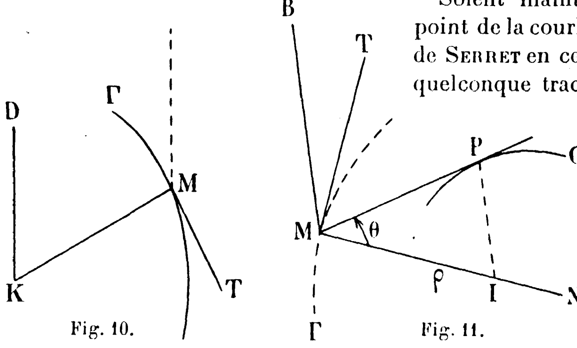



Fig. 10. Fig. 11.

Soient maintenant M (*fig.* 11) un point de la courbe $\Gamma$, MTNB le trièdre de Serret en ce point, PM une droite quelconque tracée dans le plan normal et faisant un angle $\theta$ avec MN, P un point de cette droite se projetant en I sur MN. Prenons comme variable indépendante l'arc $s$ de $\Gamma$, et posons $\mathbf{MI} = \rho \boldsymbol{n}$.

Pour avoir une développée de $\Gamma$, il faudra déterminer $\rho$ et $\theta$ en fonction de $s$ de telle sorte que la tangente en P à la courbe C décrite par P soit précisément MP : nous allons exprimer vectoriellement cette condition.

On a, avec les notations connues,

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} + \rho \boldsymbol{n} + \rho \operatorname{tg}\theta \boldsymbol{b},$$

et par suite

$$\frac{d\mathbf{P}}{ds} = \boldsymbol{t} - \rho\left(\frac{\boldsymbol{t}}{\mathrm{R}} + \frac{\boldsymbol{b}}{\mathrm{T}}\right) + \boldsymbol{n}\frac{d\rho}{ds} + \rho \operatorname{tg}\theta \frac{\boldsymbol{n}}{\mathrm{T}} + \left(\operatorname{tg}\theta \frac{d\rho}{ds} + \frac{\rho}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{ds}\right)\boldsymbol{b}$$

$$(13) \qquad = \boldsymbol{t}\left(1 - \frac{\rho}{\mathrm{R}}\right) + \boldsymbol{n}\left(\frac{d\rho}{ds} + \frac{\rho}{\mathrm{T}}\operatorname{tg}\theta\right) + \boldsymbol{b}\left(\operatorname{tg}\theta\frac{d\rho}{ds} + \frac{\rho}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{ds} - \frac{\rho}{\mathrm{T}}\right).$$

---

(1) En effet soit $\mathrm{M}_1$ un point de D; posons $\mathbf{MM}_1 = u\boldsymbol{b}$. On aura avec les notations usuelles $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M} + \mathrm{R}\boldsymbol{n} + u\boldsymbol{b}$, et la condition (5)

$$\left(\boldsymbol{b},\ \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathrm{R}\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} + \boldsymbol{n}\frac{d\mathrm{R}}{ds},\ \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\right) = \left(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{n}\frac{d\mathrm{R}}{ds} - \boldsymbol{b}\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{T}},\ \frac{\boldsymbol{n}}{\mathrm{T}}\right) = 0$$

est vérifiée. Le plan tangent à la développable le long de D est normal au vecteur

$$\boldsymbol{b} \wedge \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \frac{1}{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{n};$$

c'est donc (n° 191) le plan normal en M à $\Gamma$.

On doit d'ailleurs avoir

$$\frac{d\mathbf{P}}{ds} = \lambda(\mathbf{P} - \mathbf{M}) = \boldsymbol{n}\lambda\rho + \boldsymbol{b}\lambda\rho \operatorname{tg}\theta. \tag{14}$$

On tire alors des relations (13) et (14)

$$1 - \frac{\rho}{R} = 0,$$

$$\frac{d\rho}{ds} + \frac{\rho}{T}\operatorname{tg}\theta = \lambda\rho,$$

$$\operatorname{tg}\theta\frac{d\rho}{ds} + \frac{\rho}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{ds} - \frac{\rho}{T} = \lambda\rho\operatorname{tg}\theta.$$

Éliminons $\lambda$ entre les deux dernières relations; on aura, toutes réductions faites,

$$\rho = R, \qquad d\theta = \frac{ds}{T}.$$

Ainsi toutes les développées d'une courbe gauche sont situées sur la surface polaire, et on les détermine au moyen de la seule quadrature $\int \frac{ds}{T}$.

Soient $C_1$ et $C_2$ deux développées de $\Gamma$, $\theta_1$ et $\theta_2$ les valeurs correspondantes de $\theta$; $\theta_1$ et $\theta_2$ sont deux fonctions de $s$ telles que

$$d\theta_1 = \frac{ds}{T}, \qquad d\theta_2 = \frac{ds}{T},$$

et par suite

$$\theta_1 - \theta_2 = C^{te},$$

d'où le théorème suivant :

*Deux normales à la courbe $\Gamma$ qui restent constamment tangentes à deux développées différentes se coupent sous un angle constant.*

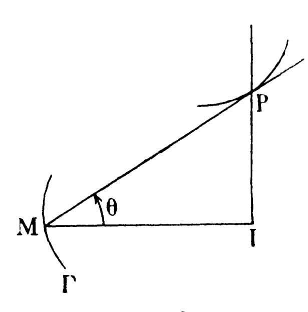


Fig. 12.

Inversement, il est clair que si deux normales à la courbe $\Gamma$ se coupent tout le long de $\Gamma$ sous un angle constant et que l'une d'elles reste constamment tangente à une développée de $\Gamma$, il en sera de même de l'autre.

Considérons par exemple le cas où la courbe $\Gamma$ est plane. La surface polaire, sur laquelle sont tracées les développées, est un cylindre : la section droite de ce cylindre par le plan de la courbe est la développée plane ordinaire, lieu des centres de courbure I. Une autre développée quelconque (*fig.* 12) est telle que l'angle PMI $= \theta$ soit constant, d'après le théorème que nous venons de démontrer. Donc l'angle MPI est aussi constant; par suite *les développées d'une courbe plane sont des hélices tracées sur le cylindre polaire.*

## CHAPITRE IV

# THÉORIE DU CONTACT. ENVELOPPES

## § I. — Définition du contact.

**197.** Dans tout ce chapitre nous considérerons exclusivement des courbes et surfaces du domaine réel. De plus ces courbes et ces surfaces seront supposées *analytiques*, c'est-à-dire que, rapportées à un système d'axes arbitrairement choisis, elles pourront être paramétrées de telle sorte que les coordonnées d'un point mobile sur l'une d'elles soient des fonctions analytiques des paramètres.

Considérons une courbe définie par les équations

$$x = x(u), \qquad y = y(u), \qquad z = z(u).$$

Le point $u_0$ est sur cette courbe un point *singulier* si les dérivées $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$, $\frac{dz}{du}$ sont toutes les trois nulles en ce point, *et cela quel que soit le mode de paramétrage adopté* (1).

Considérons de même une surface $\Sigma$ définie en coordonnées curvilignes par les équations

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v).$$

Le point $(u_0, v_0)$ est sur cette surface un point *singulier* si les jacobiens $\frac{D(y, z)}{D(u, v)}$, $\frac{D(z, x)}{D(u, v)}$, $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ sont tous trois nuls en ce point, *et cela quelles que soient les coordonnées curvilignes choisies.*

Tout point non singulier d'une courbe ou d'une surface est dit *ordinaire*.

Nous supposerons toujours que le mode de paramétrage adopté n'introduit pas de singularités apparentes.

---

(1) Cette condition restrictive a pour but d'écarter des singularités *apparentes*, qui tiennent au choix du paramètre. Par exemple considérons la courbe $x = t^2$, $y = t^4$ du plan des $xy$; les dérivées $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ sont nulles à l'origine, cependant l'origine n'est pas un point singulier, car si l'on prend comme paramètre $u = t^2$ on aura $x = u$, $y = u^2$ et $\left(\frac{dx}{du}\right)_0 = 1$. Cf. sur ce sujet Bouligand, *Cours de Géométrie analytique*, nos 92 et 93.

Soient C et $C_1$ deux courbes quelconques, planes ou gauches, tangentes entre elles en un point A qui est un point ordinaire sur chacune d'elles, M et $M_1$ deux points mobiles sur C et $C_1$, enfin $s$ et $s_1$ les arcs $\widehat{AM}$ et $\widehat{AM_1}$ de ces deux courbes que nous supposons orientées. Relativement à un système d'axes $Oxyz$, les coordonnées $x$, $y$ et $z$ du point M sont des fonctions analytiques d'un certain paramètre $t$, holomorphes au voisinage de la valeur $t_0$ correspondant au point A; admettons, pour préciser, que $s$ croisse avec $t$; on aura

$$\frac{ds}{dt} = +\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Les dérivées qui figurent sous le radical n'étant pas nulles toutes trois pour $t = t_0$, $\frac{ds}{dt}$ est une fonction analytique de $t$ holomorphe au voisinage de $t_0$, et par suite il en est de même de $s$. Inversement, $t$ est une fonction analytique de $s$, holomorphe au voisinage de $s = 0$, puisque $\left(\frac{ds}{dt}\right)_0$ n'est pas nul (n° 147), et par suite il en est de même des coordonnées $x$, $y$, $z$.

Les mêmes conclusions valent bien entendu pour la courbe $C_1$.

Établissons maintenant entre les deux courbes, au voisinage de A, une correspondance point par point satisfaisant aux conditions suivantes :

*a*) quand le point M de C tend vers A, le point correspondant, $M_1$, de $C_1$ tend aussi vers A;

*b*) la direction limite du vecteur $\mathbf{MM}_1$ est distincte de la tangente commune en A aux deux courbes;

*c*) soient

$$s = f(t), \qquad s_1 = f_1(t)$$

les équations qui réalisent cette correspondance : les fonctions $f$ et $f_1$ sont des fonctions analytiques de $t$, holomorphes au voisinage de la valeur $t_0$ où elles s'annulent. Il est clair que $t_0$ est un zéro *simple* pour chacune d'elles, le point A étant un point ordinaire pour les deux courbes.

On aura alors au voisinage du point A les deux développements

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(t_0) + (t-t_0)\left(\frac{d\mathbf{M}}{dt}\right)_0 + \ldots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}\left(\frac{d^n\mathbf{M}}{dt^n}\right)_0 + \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{d^{n+1}\mathbf{M}}{dt^{n+1}}\right)_0 + \ldots$$

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1(t_0) + (t-t_0)\left(\frac{d\mathbf{M}_1}{dt}\right)_0 + \ldots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}\left(\frac{d^n\mathbf{M}_1}{dt^n}\right)_0 + \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{d^{n+1}\mathbf{M}_1}{dt^{n+1}}\right)_0 + \ldots$$

On dit que les courbes C et $C_1$ ont en A un *contact d'ordre n* si le vecteur $\mathbf{MM}_1$ est par rapport à $t - t_0$ un infiniment petit d'ordre $n + 1$, autrement dit si l'on a

$$(1) \qquad \mathbf{M}_1(t_0) = \mathbf{M}(t_0), \quad \left(\frac{d\mathbf{M}_1}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\mathbf{M}}{dt}\right)_0, \quad \ldots, \quad \left(\frac{d^n\mathbf{M}_1}{dt^n}\right)_0 = \left(\frac{d^n\mathbf{M}}{dt^n}\right)_0,$$
$$\left(\frac{d^{n+1}\mathbf{M}_1}{dt^{n+1}}\right)_0 \neq \left(\frac{d^{n+1}\mathbf{M}}{dt^{n+1}}\right)_0.$$

Il est facile de voir qu'on exprime ainsi une propriété indépendante du mode de paramétrage adopté, car soient

$$s = \varphi(u), \qquad s_1 = \varphi_1(u)$$

les équations d'une correspondance satisfaisant aux conditions *a*), *b*), *c*) : $t$, étant par hypothèse une fonction analytique de $s$, sera aussi une fonction analytique de $u$, $t = \theta(u)$. Les vecteurs dérivés d'ordre $\alpha$, $\frac{d^\alpha \mathbf{M}}{du^\alpha}$ et $\frac{d^\alpha \mathbf{M}_1}{du^\alpha}$, sont des combinaisons linéaires des vecteurs $\frac{d^i \mathbf{M}}{dt^i}$ et $\frac{d^i \mathbf{M}_1}{dt^i}$ $(i \leqslant \alpha)$ respectivement, ces vecteurs étant affectés de coefficients qui ne dépendent que de la fonction $\theta$ et de ses dérivées. On voit alors aisément qu'on a

$$\left(\frac{d^\alpha \mathbf{M}_1}{du^\alpha}\right)_0 = \left(\frac{d^\alpha \mathbf{M}}{du^\alpha}\right)_0 \quad \text{pour } \alpha \leqslant n \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^{n+1} \mathbf{M}_1}{du^{n+1}}\right)_0 \neq \left(\frac{d^{n+1} \mathbf{M}}{du^{n+1}}\right)_0,$$

ce qui montre bien que le changement de correspondance ne modifie pas l'ordre du contact.

Soit $\pi$ un plan fixe non parallèle à la tangente commune en A. On réalise évidemment une correspondance satisfaisant aux conditions *a*), *b*) et *c*) en associant les points M et $M_1$ tels que la droite $MM_1$ reste constamment parallèle au plan $\pi$. Considérons alors une autre correspondance $(M, M'_1)$ assujettie seulement à la condition *a*). Nous aurons, dans le triangle $MM_1M'_1$,

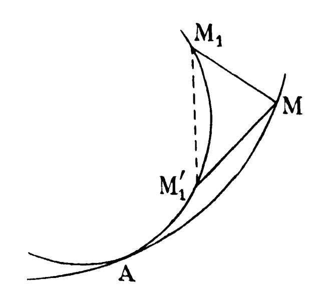


Fig. 13.

$$MM'_1 = \frac{\sin \widehat{MM_1M'_1}}{\sin \widehat{MM'_1M_1}} MM_1 ;$$

quand M tend vers A, la droite $M_1M'_1$ tend vers la tangente en A, et par suite $\sin \widehat{MM_1M'_1}$ a une limite différente de zéro. Si donc la direction limite de $MM'_1$ est distincte de la tangente en A, $MM'_1$ et $MM_1$ sont des infiniment petits du même ordre ; sinon $MM'_1$ sera un infiniment petit d'ordre *inférieur* à l'ordre de $MM_1$.

En résumé, les équations (1) expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que le contact en A soit d'ordre $n$ ; quand elles sont vérifiées, la distance des deux points M et $M_1$ est un infiniment petit d'ordre $n+1$, et il n'existe aucune correspondance point par point pour laquelle cette distance soit un infiniment petit d'ordre supérieur.

## § II. — Contact de deux courbes planes.

**198.** Supposons d'abord que C et $C_1$ soient des courbes planes situées dans un même plan, ayant respectivement pour équations

$$y = f(x), \qquad y_1 = f_1(x),$$

par rapport à un même système d'axes rectangulaires. Soit $x_0$ l'abscisse du point commun A; si l'on suppose que l'axe des $y$ n'est pas parallèle à la tangente commune, les conditions du contact d'ordre $n$ s'écrivent

$$\mathbf{M}_1(x_0)=\mathbf{M}(x_0), \qquad \left(\frac{d\mathbf{M}_1}{dx}\right)_0=\left(\frac{d\mathbf{M}}{dx}\right)_0, \qquad \ldots, \qquad \left(\frac{d^n\mathbf{M}_1}{dx^n}\right)_0=\left(\frac{d^n\mathbf{M}}{dx^n}\right)_0.$$

Or le vecteur $\frac{d\mathbf{M}}{dx}$ a pour projections sur les axes 1 et $\frac{dy}{dx}$, et d'une façon générale le vecteur $\frac{d^p\mathbf{M}}{dx^p}$ a pour projections 0 et $\frac{d^py}{dx^p}$ $(p>1)$. Les équations vectorielles ci-dessus s'écrivent donc

$$f_1(x_0)=f(x_0), \qquad f'_1(x_0)=f'(x_0), \qquad \ldots, \qquad f_1^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0).$$

On voit que si le contact est du premier ordre, les courbes ont même tangente; s'il est du second ordre, elles ont en outre même courbure.

Observons encore que si l'on cherche les points d'intersection des courbes C et $C_1$, on aura à résoudre l'équation

$$f_1(x)-f(x)=0.$$

Les conditions du contact d'ordre $n$ expriment que cette équation admet $x=x_0$ comme racine d'ordre $n$, et réciproquement on peut prendre comme définition du contact d'ordre $n$ au point A l'existence de $n+1$ points d'intersection confondus en A.

On en déduit que les courbes se traversent en A ou ne se traversent pas suivant que le contact est d'ordre pair ou impair. La vérification analytique est d'ailleurs aisée; on a en effet au voisinage de A

$$y_1-y=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\left[f_1^{(n+1)}(x_0)-f^{(n+1)}(x_0)\right]+(x-x_0)^{n+2}\theta(x),$$

$\theta(x_0)$ étant fini. Quand $x-x_0$ est suffisamment petit, le second membre a le signe de son premier terme; donc si le contact est d'ordre impair ($n+1$ pair), $y_1-y$ garde un signe constant au voisinage de A, et par suite les courbes ne se traversent pas; si le contact est d'ordre pair, $y_1-y$ change de signe quand $x$ passe par la valeur $x_0$, et par suite les courbes se traversent.

Si les deux courbes étaient données par des équations de la forme

$$f(x,\, y)=0, \qquad \mathrm{F}(x,\, y)=0,$$

on obtiendrait les conditions du contact d'ordre $n$ au point $(x_0,\, y_0)$ en calculant sur chaque courbe les valeurs des dérivées successives $y'$, $y''$, $\ldots$, $y^{(n)}$, au moyen des règles de dérivation des fonctions implicites, et égalant les valeurs des dérivées correspondantes au point $(x_0,\, y_0)$.

Supposons enfin que les courbes soient données par les équations

(C) $\qquad \mathrm{F}(x,\, y)=0,$

($C_1$) $\qquad x=f(t), \qquad y=g(t).$

Posons $\qquad \mathrm{F}[f(t),\, g(t)]=\mathcal{F}(t).$

L'équation

$$\mathcal{F}(t)=0$$

donne les arguments des points d'intersection des courbes C et $C_1$. Pour qu'il y ait contact d'ordre $n$ au point d'argument $t_0$, il faut et il suffit que la fonction $\mathcal{F}(t)$ s'annule ainsi que ses $n$ premières dérivées pour $t=t_0$; les conditions du contact d'ordre $n$ prennent donc la forme simple

$$\mathcal{F}(t_0)=0, \qquad \mathcal{F}'(t_0)=0, \qquad \ldots, \qquad \mathcal{F}^{(n)}(t_0)=0.$$

**199.** Considérons une courbe plane C d'équation

$$F(x, y)=0,$$

et une seconde courbe plane Γ dont l'équation

$$f(x, y\,;\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)=0$$

contient $n$ paramètres arbitraires. Cherchons s'il est possible de choisir ces paramètres de telle sorte que les deux courbes aient au point $(x_0, y_0)$ un contact d'ordre $p$ : on obtiendra $p+1$ relations entre les paramètres arbitraires. Si donc $p+1\leqslant n$, le problème admettra *en général* des solutions; en particulier si $p+1=n$, la courbe obtenue est dite *osculatrice* à la première au point $(x_0, y_0)$. La courbe Γ étant ainsi déterminée, il pourra arriver que son contact avec la courbe C soit en réalité d'ordre supérieur à $n$ : on dira dans ce cas qu'il y a *surosculation* au point $(x_0, y_0)$.

Considérons par exemple la droite

$$y=ax+b.$$

La droite *osculatrice* à la courbe C au point $(x_0, y_0)$ aura en ce point un contact du premier ordre; on aura, pour déterminer $a$ et $b$, les équations

$$y_0=ax_0+b, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0+a\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0=0,$$

ce qui donne la droite

$$(y-y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0+(x-x_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0=0:$$

ainsi la droite osculatrice au point $(x_0, y_0)$ est la tangente.

Sur la droite, on a $y''=0$; donc il ne pourra y avoir surosculation qu'aux points d'inflexion de la courbe C.

Dans le plan, l'équation générale du cercle contient trois paramètres. Donc le cercle osculateur à une courbe C au point $A(x_0, y_0)$ aura avec cette courbe un contact du second ordre. Soient P son centre, R son rayon, et

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}(s)$$

l'équation de C. Faisons correspondre à tout point $(s)$ de C un point du cercle osculateur, de telle sorte que le point A ait sur les deux courbes le même argument $s_0$. On aura au point $\mathbf{M}_1(s)$ du cercle osculateur

$$\mathbf{M}_1=\mathbf{P}+\mathrm{R}\mathbf{u}(s),$$

$u$ désignant un vecteur de longueur 1. Les conditions du contact du second ordre s'écriront

$$\mathbf{P} + \mathrm{R}u(s_0) = \mathbf{A}, \qquad \mathrm{R}\left(\frac{du}{ds}\right)_0 = \left(\frac{d\mathbf{M}}{ds}\right)_0, \qquad \mathrm{R}\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2}\right)_0,$$

et, comme on a identiquement

$$(u)^2 = 1, \qquad u.\frac{du}{ds} = 0, \qquad \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + u.\frac{d^2u}{ds^2} = 0,$$

on en tire, au point A,

$$\frac{\mathbf{A} - \mathbf{P}}{\mathrm{R}} \cdot \frac{1}{\mathrm{R}}\left(\frac{d\mathbf{M}}{ds}\right)_0 = 0, \qquad \frac{1}{\mathrm{R}^2} + \frac{\mathbf{A} - \mathbf{P}}{\mathrm{R}} \cdot \frac{1}{\mathrm{R}}\left(\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2}\right)_0 = 0.$$

La première équation exprime que AP est normale à la courbe en A, et la seconde, mise sous la forme

$$\mathbf{AP}.\left(\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2}\right)_0 = 1,$$

exprime que P est le centre de courbure en A : le cercle osculateur se confond donc avec le cercle de courbure.

Il résulte de ce que nous avons vu plus haut que le cercle de courbure traverse en général la courbe au point de contact; il y a exception pour les points où le contact est du troisième ordre (ou d'ordre impair supérieur) : on pourra vérifier qu'il en est ainsi, par exemple, aux quatre sommets de l'ellipse.

## § III. — Contact de deux courbes gauches.

**200.** Reportons-nous à la définition du contact donnée au n° 197. Les conditions du contact du premier ordre

$$\mathbf{M}_1(t_0) = \mathbf{M}(t_0), \qquad \left(\frac{d\mathbf{M}_1}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\mathbf{M}}{dt}\right)_0,$$

montrent que deux courbes qui ont un contact du premier ordre en un point ont même tangente en ce point.

En ajoutant la condition

$$\left(\frac{d^2\mathbf{M}_1}{dt^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2\mathbf{M}}{dt^2}\right)_0,$$

on obtient le contact du second ordre. Par suite deux courbes qui ont un contact du second ordre en un point ont en ce point même trièdre de Serret et même courbure.

Enfin en ajoutant la condition

$$\left(\frac{d^3\mathbf{M}_1}{dt^3}\right)_0 = \left(\frac{d^3\mathbf{M}}{dt^3}\right)_0,$$

on obtient le contact du troisième ordre. Par suite deux courbes qui ont en un point un contact du troisième ordre ont en ce point même trièdre de SERRET, même courbure et même torsion.

Supposons d'abord que les courbes C et $C_1$ soient définies par les équations

$$(C) \qquad y = f(x), \qquad z = g(x),$$
$$(C_1) \qquad y = f_1(x), \qquad z = g_1(x).$$

Soit $x_0$ l'abscisse d'un point d'intersection. Les conditions du contact d'ordre $n$ s'écriront, si l'on suppose que le plan des $yz$ n'est pas parallèle à la tangente au point de contact,

$$f_1(x_0) = f(x_0), \qquad f_1'(x_0) = f'(x_0), \ \ldots, \ f_1^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0),$$
$$g_1(x_0) = g(x_0), \qquad g_1'(x_0) = g'(x_0), \ \ldots, \ g_1^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0).$$

Si les courbes sont données par des équations de la forme

$$(C) \qquad F(x, y, z) = 0, \qquad \Phi(x, y, z) = 0,$$
$$(C_1) \qquad F_1(x, y, z) = 0, \qquad \Phi_1(x, y, z) = 0,$$

on calculera les dérivées successives $y^{(h)}$, $z^{(h)}$, en appliquant les règles relatives à la dérivation des fonctions implicites. Les conditions du contact d'ordre $n$ s'en déduisent immédiatement.

On pourrait procéder de la même façon dans le cas où les courbes sont données par des équations de la forme

$$(C) \qquad F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0,$$
$$(C_1) \qquad x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t).$$

Mais, dans ce dernier cas, les équations de condition du contact d'ordre $n$ prennent une forme plus symétrique si l'on introduit, comme plus haut, les fonctions

$$\mathcal{F}_1(t) = F_1[f(t), g(t), h(t)],$$
$$\mathcal{F}_2(t) = F_2[f(t), g(t), h(t)].$$

On obtient alors les $2n + 2$ équations de condition sous la forme

$$\mathcal{F}_i(t_0) = 0, \qquad \mathcal{F}_i'(t_0) = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathcal{F}_i^{(n)}(t_0) = 0, \qquad (i = 1,2).$$

**201.** Considérons une première courbe $C_1$ entièrement déterminée

$$F_1(x, y, z) = 0, \qquad \Phi_1(x, y, z) = 0,$$

et une seconde courbe $C_2$ dont les équations contiennent $2n + 2$ paramètres arbitraires $a, b, \ldots, l$,

$$F_2(x, y, z; a, b, \ldots, l) = 0, \qquad \Phi_2(x, y, z; a, b, \ldots, l) = 0.$$

On pourra en général disposer de ces $2n + 2$ paramètres de telle sorte que la courbe $C_2$ ait au point $(x_0, y_0, z_0)$ un contact d'ordre $n$ avec $C_1$, puisque les équations de condition sont au nombre de $2n + 2$. On dit dans ce cas que la courbe $C_2$ est osculatrice à $C_1$ au point $(x_0, y_0, z_0)$.

Par exemple les équations d'une droite contiennent quatre paramètres arbitraires : la droite osculatrice en un point A d'une courbe C aura donc en A un contact du premier ordre avec C; elle se confond par suite avec la tangente en A.

Les équations d'un cercle contiennent six paramètres arbitraires : le cercle osculateur en un point A d'une courbe C aura donc en A un contact du second ordre avec C. Il est clair que ce cercle est tangent à C au point A et qu'il est dans le plan osculateur à la courbe en ce point. Il suffit alors de répéter exactement le raisonnement que nous avons fait dans le cas où la courbe C est plane pour vérifier l'identité du cercle osculateur et du cercle de courbure.

## § IV. — Contact d'une courbe et d'une surface.

**202.** Considérons une surface S et une courbe Γ. Si au point A supposé ordinaire sur S et sur Γ, la courbe et la surface ont $n+1$ points d'intersection confondus, on dit qu'elles ont en A un *contact d'ordre n*.

Supposons que la surface S soit définie par l'équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

et la courbe Γ par les équations

$$x = f(t), \qquad y = g(t) \qquad z = h(t).$$

Posons

$$F[f(t), g(t), h(t)] \equiv \mathcal{F}(t).$$

Les conditions du contact d'ordre $n$ au point $t_0$ s'écrivent

$$\mathcal{F}(t_0) = 0, \qquad \mathcal{F}'(t_0) = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathcal{F}^{(n)}(t_0) = 0.$$

La première équation exprime évidemment que le point $A(t_0)$ est situé sur la surface, et la seconde que la tangente en A à Γ est dans le plan tangent à S en A.

Les conditions du contact d'ordre $n$ s'exprimant au moyen de $n+1$ équations, on pourra, si l'équation de la surface comprend $n+1$ paramètres arbitraires, choisir ces paramètres de telle sorte que la courbe et la surface aient, en un point donné, un contact d'ordre $n$ : on dit alors que la surface est osculatrice à la courbe au point donné.

L'équation du plan

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

dépend de *trois* paramètres arbitraires, les rapports de trois des coefficients au quatrième. On pourra donc les déterminer de telle sorte que le plan ait au point $M(t)$ un contact du second ordre avec la courbe

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t).$$

Il suffira pour cela qu'on ait

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ Ax' + By' + Cz' &= 0, \\ Ax'' + By'' + Cz'' &= 0. \end{aligned}$$

L'équation du plan cherché s'écrit donc

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

On retrouve bien le plan que nous avions appelé plan osculateur.

Pour que le contact fût du troisième ordre, il faudrait qu'on eût en outre

$$Ax''' + By''' + Cz''' = 0;$$

on dit dans ce cas qu'il y a *surosculation*, ou encore que le plan osculateur est *stationnaire*.

L'équation de la sphère

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - \rho^2 = 0$$

dépend de *quatre* paramètres : la *sphère osculatrice* en un point A d'une courbe C aura donc avec cette courbe un contact du troisième ordre en ce point.

Prenons comme origine le centre O de la sphère osculatrice; son équation s'écrira

$$(\mathbf{M}_1)^2 - \rho^2 = 0.$$

Soit d'autre part $\mathbf{M} = \mathbf{M}(s)$

l'équation de la courbe C. On obtiendra les conditions d'osculation en écrivant que l'équation

$$[\mathbf{M}(s)]^2 - \rho^2 = 0$$

a une racine quadruple au point A. On aura donc en ce point de la courbe, avec les notations usuelles,

$$\mathbf{M}.\boldsymbol{t} = 0, \qquad \mathbf{M}.\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} + 1 = 0, \qquad \mathbf{M}.\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2} = 0.$$

On voit d'abord que le vecteur **OM** est normal en A à la courbe; on peut donc poser

$$\mathbf{M} = u\boldsymbol{n} + v\boldsymbol{b},$$

$u$ et $v$ désignant des scalaires à déterminer. Si l'on porte cette valeur de **M** dans les deux dernières équations et qu'on y remplace en outre

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \text{ par } \frac{\boldsymbol{n}}{R}, \qquad \frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2} \text{ par } -\frac{1}{R}\left(\frac{\boldsymbol{t}}{R} + \frac{\boldsymbol{b}}{T}\right) - \frac{\boldsymbol{n}}{R^2}\frac{dR}{ds}$$

on aura, toutes réductions faites,

$$u = -R, \qquad v = T\frac{dR}{ds}.$$

L'équation
$$\mathbf{MO} = \mathrm{R}\boldsymbol{n} - \mathrm{T}\frac{d\mathrm{R}}{ds}\boldsymbol{b}$$
montre alors que le centre de la sphère osculatrice est sur la droite polaire, et que son rayon $\rho$ est donné par la formule
$$\rho^2 = \mathrm{R}^2 + \mathrm{T}^2\left(\frac{d\mathrm{R}}{ds}\right)^2.$$

On pourra, à titre d'exercice, établir les propriétés suivantes :

1° Le lieu du centre de la sphère osculatrice à une courbe C est l'arête de rebroussement de la surface polaire (n° 196).

2° Si la surface polaire est un cône, la courbe C est une courbe sphérique.

3° Si la sphère osculatrice a un rayon constant, la courbe C est une ligne à courbure constante ou une courbe sphérique.

## § V. — Enveloppes.

**203.** Rappelons d'abord les résultats connus relatifs à l'enveloppe de la famille de courbes planes à un paramètre
$$f(x, y; a) = 0.$$

Si cette enveloppe existe, on obtiendra son équation en éliminant $a$ entre les équations
$$f(x, y; a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0\,(^1).$$

Quand l'élimination est impossible, il n'y a pas d'enveloppe; supposons-la possible et soit
$$\mathrm{R}(x, y) = 0$$
l'équation obtenue. Cette équation représente une courbe qui est soit l'enveloppe de la famille, soit un lieu de points singuliers des courbes de la famille, ou encore qui se décompose en deux courbes dont l'une est l'enveloppe et l'autre un lieu de points singuliers.

Les points où chaque courbe de la famille est coupée par la courbe infiniment voisine sont les points où la courbe considérée touche l'enveloppe (*points caractéristiques*).

Si l'on a à chercher l'enveloppe de la famille
$$\mathrm{F}(x, y; a, b) = 0,$$
où $a$ et $b$ sont deux paramètres satisfaisant à la relation
$$\varphi(a, b) = 0,$$

---

[1] Cet énoncé suppose essentiellement la continuité de $\frac{\partial f}{\partial a}$. Si le long d'une courbe $\Gamma$ du plan $x\mathrm{O}y$, $\frac{\partial f}{\partial a}$ devient infinie, le plan tangent à la surface représentée dans le système d'axes $\mathrm{O}xya$ par l'équation $f(x, y; a) = 0$ est parallèle à l'axe $\mathrm{O}a$ en chaque point de la surface qui se projette sur $\Gamma$ : cette courbe joue donc le rôle d'un contour apparent, ou, ce qui revient au même, d'une enveloppe, bien que ne vérifiant pas l'équation $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ (cf., BOULIGAND, *Géométrie analytique*, p. 238).

on l'obtiendra en éliminant $a$ et $b$ entre les équations

$$F=0, \qquad \varphi=0, \qquad \frac{D(F, \varphi)}{D(a, b)}=0.$$

APPLICATION. — *On considère la famille de paraboles*

$$y=ax^2+bx+\frac{b^2}{8},$$

*où a et b sont des paramètres variables. Quelle relation faut-il établir entre a et b pour que l'enveloppe de la famille à un paramètre ainsi obtenue ait un contact du second ordre avec chaque enveloppée?*

L'enveloppe est définie par les équations

$$y=ax^2+bx+\frac{b^2}{8}, \qquad 0=x^2+\left(x+\frac{b}{4}\right)\frac{db}{da},$$

c'est-à-dire que la seconde équation, où l'on remplace $b$ par son expression en fonction de $a$, détermine $a$ en fonction de $x$, et, en reportant cette valeur dans la première équation, on aura l'équation de l'enveloppe.

On aura par suite, en chaque point de l'enveloppe,

$$y'=2ax+b+\left[x^2+\left(x+\frac{b}{4}\right)\frac{db}{da}\right]\frac{da}{dx}=2ax+b,$$

puis

$$y''=2a+\left(2x+\frac{db}{da}\right)\frac{da}{dx}.$$

Sur chaque enveloppée on a d'ailleurs

$$y'=2ax+b, \qquad y''=2a.$$

Les conditions du contact du second ordre se réduisent donc à l'équation

$$\left(2x+\frac{db}{da}\right)\frac{da}{dx}=0.$$

Si $\frac{da}{dx}$ était nul, $b$, qui est fonction de $a$ seulement, serait indépendant de $x$, et l'on ne pourrait avoir identiquement

$$x^2+\left(x+\frac{b}{4}\right)\frac{db}{da}=0\ ;$$

il reste donc

$$2x+\frac{db}{da}=0,$$

ou, en portant cette valeur dans l'équation précédente,

$$\frac{db}{da}\left(b-\frac{db}{da}\right)=0.$$

Si l'on prend $\frac{db}{da}=0$, la famille correspondante n'a pas d'enveloppe proprement dite : elle se compose de $\infty^1$ paraboles tangentes entre elles au point $\left(0, \frac{b^2}{8}\right)$.

Soit maintenant $b-\frac{db}{da}=0$, ou

$$b=2\lambda e^a\ ;$$

à chaque valeur de λ correspond une famille de paraboles

$$y = ax^2 + 2\lambda e^a x + \frac{\lambda^2}{2} e^{2a},$$

dont l'enveloppe est définie par les équations paramétriques

$$x = -\lambda e^a, \qquad y = e^{2a}\left(\lambda^2 a + \frac{1 - 4\lambda^2}{2}\right).$$

A chaque valeur de $a$ correspondent un point de l'enveloppe et une parabole de la famille qui a un contact du second ordre avec l'enveloppe en ce point.

**204.** Passons maintenant aux enveloppes de courbes gauches. L'équation vectorielle

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(t;\, a), \tag{2}$$

où $t$ est une variable et $a$ une constante arbitraire, définit pour chaque valeur de $a$ une courbe de l'espace à trois dimensions, et l'ensemble de ces courbes forme une surface. Nous allons montrer que, du moins *en général*, ces courbes n'ont pas d'enveloppe, c'est-à-dire qu'on ne pourra en général trouver de courbes E à laquelle soient tangentes les courbes (2).

Remarquons d'abord que nous avons déjà étudié une question analogue dans le cas où les courbes (2) sont des droites : ces droites engendrent une surface réglée, et, en général, elles ne restent pas tangentes à une courbe, sauf le cas où la surface réglée est développable.

Supposons donc que les courbes (2) aient une enveloppe E. A chaque valeur $a$ du paramètre correspondront :

1° une courbe de la famille, C ;

2° un point P où C sera tangente à E.

On peut donc prendre l'équation vectorielle de E sous la forme

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(a),$$

et, puisque sur chaque courbe C il existe un point P, il existera aussi une fonction $t = \varphi(a)$ telle que l'on ait

$$\mathbf{M}[\varphi(a);\, a] \equiv \mathbf{P}(a).$$

La tangente à C au point P$(a)$ est dirigée suivant le vecteur $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}$, où $t$ est remplacé par $\varphi(a)$; la tangente à E au même point est dirigée suivant le vecteur

$$\frac{d\mathbf{P}}{da} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\varphi'(a) + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial a}.$$

Pour que les deux courbes soient tangentes en P, il faut donc et il suffit que l'on ait, en désignant par λ un scalaire convenablement choisi,

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial a} = \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \tag{3}$$

Soient, en coordonnées cartésiennes,

$$x = x(t;\ a), \qquad y = y(t;\ a), \qquad z = z(t;\ a)$$

les équations de la famille de courbes. La relation (3) s'écrit

$$(4) \qquad \frac{\partial x}{\partial a} : \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial a} : \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial a} : \frac{\partial z}{\partial t}.$$

On a ainsi deux équations pour déterminer la fonction inconnue $t = \varphi(a)$ qui fera connaître l'enveloppe : on voit donc qu'en général le problème n'a pas de solution.

Si les équations de la famille sont prises sous la forme

$$(5) \qquad \mathrm{F}(x, y, z;\ a) = 0, \qquad \mathrm{G}(x, y, z;\ a) = 0,$$

on peut poser $x = t$ et considérer que ces équations définissent $y$ et $z$ en fonction de $t$ et $a$. On aura donc

$$(6) \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial a} = 0,$$

et, comme $\frac{\partial x}{\partial a} = 0$, les équations (4) donnent

$$\frac{\partial y}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial a} = 0,$$

et par suite, d'après (6),

$$(7) \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial a} = 0.$$

On a ainsi en définitive *quatre* équations, (5) et (7), pour déterminer les *trois* fonctions $x(a)$, $y(a)$ et $z(a)$ qui définissent l'enveloppe.

APPLICATION. — *Déterminer la fonction* U *du paramètre* $u$ *de façon que la famille de courbes gauches*

$$(8) \qquad x = \frac{1 - 2au}{\mathrm{U} + a}, \qquad y = \frac{u - a\frac{u^2}{2}}{\mathrm{U} + a}, \qquad z = \frac{a}{\mathrm{U} + a}$$

*ait d'une façon effective une courbe enveloppe.*

(*Bordeaux, épreuve théorique.*)

Les équations (4) s'écrivent ici, quand on suppose $\mathrm{U} + a \neq 0$,

$$\frac{2a^2 + 2a(\mathrm{U} - u\mathrm{U}') + \mathrm{U}'}{2u\mathrm{U} + 1} = \frac{a^2u + a\left(u\mathrm{U} - 1 - \frac{u^2}{2}\mathrm{U}'\right) - \mathrm{U} + u\mathrm{U}'}{\frac{u^2}{2}\mathrm{U} + u} = -a\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}}.$$

On aura la condition de compatibilité en éliminant $a$. Il reste

$$2\mathrm{U} - u\mathrm{U}' = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{U} = ku^2.$$

**205.** Soit

$$(9) \qquad \mathbf{M} = \mathbf{M}(u, v;\ a)$$

l'équation d'une surface S dépendant d'un paramètre $a$.

L'équation

(10) $$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}[u, v; \varphi(u, v)],$$

où $\varphi$ est une fonction bien déterminée de $u$ et $v$, représente une certaine surface $\Sigma$, et toute relation entre $u$ et $v$ définit une courbe sur S et une courbe sur $\Sigma$. En particulier, la relation

$$\varphi(u, v) = a$$

définit évidemment la courbe d'intersection $\Gamma$ de S et $\Sigma$.

Cherchons s'il est possible de déterminer la fonction $\varphi$ de telle sorte que les plans tangents à S et $\Sigma$ coïncident en tout point de $\Gamma$.

Le plan tangent à S au point M a pour équation (n° 190)

$$\mathbf{MP} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\right) = 0;$$

le plan tangent à $\Sigma$ au point $M_1$ a de même pour équation

$$\mathbf{M}_1\mathbf{P} \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) \wedge \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{dv}\right)\right] = 0.$$

Pour que ces plans coïncident en un point de $\Gamma$, il faut et il suffit que les vecteurs

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) \wedge \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)$$

soient parallèles, ou encore que les vecteurs

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}, \qquad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

soient perpendiculaires à une même direction, ou enfin que les vecteurs $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}$ soient coplanaires, et comme en tout point de $\Gamma$ on a $\varphi = a$, la condition cherchée s'écrit finalement

(11) $$\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial a}\right) = 0.$$

En résumé, l'équation (9) définit une famille de surfaces S à un paramètre $a$; ces surfaces ont pour enveloppe une surface $\Sigma$ dont on obtient l'équation en remplaçant dans l'équation (10) $a$ par sa valeur en fonction de $u$ et $v$ tirée de (11).

Chaque surface S déterminée est tangente à $\Sigma$ le long d'une courbe $\Gamma$, appelée *caractéristique*, qui est définie sur S et sur $\Sigma$ par l'équation (11) où l'on a donné au paramètre $a$ la valeur correspondant à S.

En coordonnées cartésiennes, soient

$$x = x(u, v; a), \qquad y = y(u, v; a), \qquad z = z(u, v; a)$$

les équations paramétriques des surfaces S; on aura les équations de $\Sigma$ en

remplaçant $a$ dans les trois équations ci-dessus par sa valeur tirée de l'équation

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial a} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial a} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial a} \end{vmatrix} = 0.$$

A toute valeur de $a$ correspondent d'une part une surface S, d'autre part une courbe de S, définie par l'équation (12), qui est précisément la caractéristique.

On en déduit que, si l'équation de la famille de surfaces est prise sous la forme

$$F(x, y, z; a) = 0,$$

on aura l'équation de l'enveloppe en éliminant $a$ entre les équations

$$F(x, y, z; a) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial a} = 0,$$

résultat déjà établi dans le cours de Mathématiques générales. Ces deux équations étant équivalentes au système

$$F(x, y, z; a) = 0, \qquad F(x, y, z; a + da) = 0,$$

on voit que la caractéristique de la surface S est la courbe d'intersection de S et de la surface infiniment voisine.

Notons enfin qu'on peut avoir à considérer, dans une famille de surfaces à deux paramètres,

$$F(x, y, z; a, b) = 0,$$

l'enveloppe d'une famille à un paramètre obtenue en établissant entre $a$ et $b$ une relation

$$\theta(a, b) = 0.$$

On peut considérer que cette relation définit $b$, par exemple, comme fonction de $a$ ; on aura l'enveloppe au moyen des équations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{da} = 0, \qquad \theta = 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial a} + \frac{\partial \theta}{\partial b}\frac{db}{da} = 0,$$

ou encore, en éliminant $a$ et $b$ entre les trois équations,

$$F = 0, \qquad \theta = 0, \qquad \frac{D(F, \theta)}{D(a, b)} = 0.$$

Remarque. — Des conclusions du n° 204 il suit que les caractéristiques d'une famille de surfaces à un paramètre ont une enveloppe. En effet les quatre équations (5) et (7) se réduisent ici aux trois équations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 0;$$

ces équations sont *en général* compatibles en $x$, $y$ et $z$, et elles définissent l'enveloppe des caractéristiques.

Appliquons ceci à la famille de plans

(13) $$Ax + By + Cz + D = 0$$

où A, B, C et D sont des fonctions données d'un paramètre $t$. La caractéristique, définie par les équations (13) et

(14) $$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

est une droite; la surface enveloppe est donc réglée, et comme les caractéristiques ont elles-mêmes une enveloppe, cette surface réglée est développable. L'arête de rebroussement de cette développable sera définie par les équations (13), (14) et

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0.$$

Inversement, soit

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(s)$$

l'équation d'une courbe C. Le plan osculateur en M a pour équation, avec les notations usuelles,

(15) $$\boldsymbol{b}.\mathbf{MP} = 0.$$

L'ensemble des plans osculateurs à la courbe C forme une famille à un paramètre; pour avoir la caractéristique, observons que l'équation (15) peut s'écrire

$$\boldsymbol{b}.(\mathbf{P} - \mathbf{M}) = 0;$$

on aura donc, en tout point P de la caractéristique,

$$\boldsymbol{b}.(\mathbf{P} - \mathbf{M}) = 0, \qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}.(\mathbf{P} - \mathbf{M}) - \boldsymbol{b}.\frac{d\mathbf{M}}{ds} = 0,$$

ou, puisque $$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \frac{\boldsymbol{n}}{T}, \qquad \boldsymbol{b}.\frac{d\mathbf{M}}{ds} = 0,$$

$$\boldsymbol{b}.\mathbf{MP} = 0, \qquad \boldsymbol{n}.\mathbf{MP} = 0,$$

ce qui montre que la caractéristique n'est autre que la tangente[1]. Toute courbe C est donc l'arête de rebroussement de la développable enveloppée par ses plans osculateurs.

**206.** Il nous reste à dire quelques mots des familles de courbes ou de surfaces à deux paramètres.

Considérons d'abord une famille de courbes C

(16) $$\mathbf{M} = \mathbf{M}(t;\, \alpha, \beta),$$

à deux paramètres $\alpha$ et $\beta$ : une telle famille prend le nom de *congruence*. Nous étudierons plus tard en détail les congruences de droites. Bornons-nous pour l'instant à montrer que les courbes définies par l'équation (16) sont tangentes à une surface qui est appelée la *surface focale* de la congruence.

---

[1] On pourra de même vérifier que la caractéristique du plan normal est la droite polaire, et que cette droite touche son enveloppe au centre de la sphère osculatrice.

L'équation

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}[\varphi(\alpha, \beta); \alpha, \beta]$$

définit, en coordonnées curvilignes $(\alpha, \beta)$, une surface $\Sigma$. A chaque couple de valeurs de $\alpha$ et $\beta$ correspondent ainsi :

1° un point $M_1$ de $\Sigma$;

2° une courbe C passant par $M_1$, puisque pour $t = \varphi(\alpha, \beta)$ on a $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1$.

Cherchons si l'on peut déterminer la fonction $\varphi$ de telle sorte que la courbe C soit tangente en $M_1$ à $\Sigma$. Le plan tangent en $M_1$ à $\Sigma$ a pour équation

$$\left(\mathbf{M}_1\mathbf{P}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \beta}\right) = 0;$$

la tangente en $M_1$ à C est dirigée suivant le vecteur $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}$; pour qu'elle soit dans le plan tangent à $\Sigma$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \beta}\right) = 0,$$

ou, après simplification et remplacement de $\varphi$ par $t$,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \beta}\right) = 0;$$

telle est l'équation qui définit la fonction $t = \varphi(\alpha, \beta)$.

En coordonnées cartésiennes, soient

$$x = x(t; \alpha, \beta), \qquad y = y(t; \alpha, \beta), \qquad z = z(t; \alpha, \beta)$$

les équations de la congruence. On aura les équations paramétriques de la surface focale en remplaçant dans les équations ci-dessus $t$ par sa valeur en fonction de $\alpha$ et $\beta$ tirée de l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{vmatrix} = 0.$$

Si les équations de la congruence sont données sous la forme

$$F(x, y, z; \alpha, \beta) = 0, \qquad G(x, y, z; \alpha, \beta) = 0,$$

on déduit sans peine de ce qui précède que les équations paramétriques de la surface focale s'obtiennent par résolution du système

$$F = 0, \qquad G = 0, \qquad \frac{D(F, G)}{D(\alpha, \beta)} = 0.$$

Considérons en second lieu une famille de surfaces S à deux paramètres

(17) $$\mathbf{M} = \mathbf{M}(u, v; \alpha, \beta).$$

L'équation

$$(18) \qquad \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}[\theta(\alpha, \beta), \varphi(\alpha, \beta); \alpha, \beta]$$

définit, en coordonnées curvilignes $(\alpha, \beta)$, une surface $\Sigma$. A chaque couple de valeurs de $(\alpha, \beta)$ correspondent alors :

1° un point $M_1$ de $\Sigma$;

2° une surface S passant par $M_1$.

Cherchons si l'on peut déterminer les fonctions $\theta$ et $\varphi$ de telle sorte que la surface S soit tangente en $M_1$ à la surface $\Sigma$.

Soit $\mathbf{N}$ un vecteur normal en $M_1$ à S; pour qu'il soit aussi normal en $M_1$ à $\Sigma$, il faut que l'on ait

$$\mathbf{N}.\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{N}.\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\mathbf{N}.\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \beta}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{N}.\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \beta} = 0.$$

Les vecteurs $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \beta}$ doivent donc être coplanaires aux vecteurs $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}$, ce qui donne les conditions

$$(19) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha}, \dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\right) = 0, \\ \left(\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial \beta}, \dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\right) = 0. \end{cases}$$

Inversement, s'il existe des fonctions

$$u = \theta(\alpha, \beta), \qquad v = \varphi(\alpha, \beta)$$

satisfaisant aux équations (19), l'équation (18) représentera en général [1] une surface $\Sigma$ tangente à toutes les surfaces S représentées par l'équation (17). Nous verrons tout à l'heure que cette surface $\Sigma$ peut ne pas constituer une enveloppe au sens ordinaire.

Supposons en particulier que les surfaces S soient définies par une équation cartésienne

$$F(x, y, z; \alpha, \beta) = 0.$$

On déduit sans peine de ce qui précède que l'enveloppe $\Sigma$, si elle existe, doit satisfaire aux trois équations

$$(20) \qquad F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0.$$

Chaque surface de la famille est alors tangente à l'enveloppe en un ou plusieurs points *caractéristiques*, qu'on obtient en résolvant le système (20) par rapport à $x$, $y$, $z$.

---

[1] Exceptionnellement il pourra arriver que cette équation représente une courbe ou même un point.

Inversement, on démontre que l'élimination de $\alpha$ et $\beta$ entre les équations (20) conduit soit à une surface $\Sigma$ tangente à toutes les surfaces de la famille, soit à un lieu de points singuliers de ces surfaces. Il faut d'ailleurs observer [1] que, si la surface $\Sigma$ existe, il pourra arriver, dans certains cas singuliers, que toutes les surfaces enveloppées soient tangentes à $\Sigma$ en un ou plusieurs points fixes, ou tout le long d'une courbe déterminée, la même pour toutes les surfaces de la famille. Par exemple si l'on applique cette méthode aux cylindres

$$(21) \qquad \alpha x^2 + \beta x - \alpha\beta - z = 0,$$

on trouve pour surface $\Sigma$ le cylindre

$$x^3 - z = 0.$$

Chacun des $\infty^1$ cylindres correspondant à $\beta = \alpha^2$ est tangent à $\Sigma$ le long de la génératrice commune

$$x = \alpha, \qquad z = \alpha^3;$$

mais un cylindre de la famille, choisi arbitrairement, ne sera tangent à $\Sigma$ que le long de la génératrice commune à l'infini. Il est clair qu'en pareil cas la surface $\Sigma$ ne peut être considérée comme une enveloppe proprement dite; on peut en effet, il est facile de s'en assurer, établir entre $\alpha$ et $\beta$ une relation telle que la famille des paraboles (21) du plan $xOz$ ait pour enveloppe une courbe $\Gamma$ choisie arbitrairement dans le plan; il suffira d'imposer à $\Gamma$ la condition d'être tangente aux paraboles en leur point commun à l'infini pour que le cylindre de section droite $\Gamma$ possède les mêmes propriétés que $\Sigma$ relativement aux cylindres (21).

**207.** Terminons ce chapitre par deux applications simples.

I. — *Lieu des foyers et enveloppe des directrices des paraboles qui ont en un point donné un contact du second ordre avec une courbe donnée.*

Prenons comme origine des axes le point donné, et comme axe des $x$ la tangente en O à la courbe donnée, d'équation $y = f(x)$. On aura donc

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = \frac{1}{\mu},$$

$\mu$ désignant une constante convenablement choisie.

L'équation des paraboles tangentes en O à $Ox$ peut s'écrire

$$F(x, y) \equiv (x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 + 2ay = 0.$$

Posons
$$F[x, f(x)] = \mathcal{F}(x).$$

Les conditions du contact du second ordre s'écrivent

$$\mathcal{F}(0) = 0, \qquad \mathcal{F}'(0) = 0, \qquad \mathcal{F}''(0) = 0.$$

Les deux premières sont réalisées d'elles-mêmes, et la dernière donne $a = -\mu\cos^2\varphi$. On aura alors pour l'équation des paraboles

$$F(x, y) \equiv (x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 - 2\mu y\cos^2\varphi \equiv$$
$$\left(x - \frac{\mu}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right)^2 + \left(y - \frac{\mu}{2}\cos^2\varphi\right)^2 - \left(x\sin\varphi - y\cos\varphi - \frac{\mu}{2}\cos\varphi\right)^2 = 0.$$

---

[1] E. Gau, *Bulletin des Sciences mathématiques*, tome L, octobre 1926.

Le foyer $(\xi, \eta)$ a donc pour coordonnées

$$\xi = \frac{\mu}{2}\sin\varphi\cos\varphi, \qquad \eta = \frac{\mu}{2}\cos^2\varphi;$$

on en déduit

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{\mu}{2}\eta = 0,$$

équation qui montre que le lieu des foyers est une circonférence tangente en O à $Ox$. L'équation des directrices

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi - \frac{\mu}{2}\cos\varphi = 0$$

montre immédiatement que toutes ces droites passent par le point fixe $\left(0, -\frac{\mu}{2}\right)$; c'est à quoi se réduit leur enveloppe.

II. — *On considère un plan variable* P *dont l'équation en coordonnées rectangulaires est*

$$18u^2x + y - 6uz - 3u^4 = 0,$$

*u désignant un paramètre arbitraire. Montrer que l'arête de rebroussement de la développable enveloppe du plan* P *est une hélice. Trouver les trajectoires orthogonales des génératrices de cette développable, et reconnaître qu'elles sont situées dans des plans normaux aux génératrices du cylindre dont l'hélice précédente est une géodésique.*

(*Caen, épreuve écrite.*)

L'arête de rebroussement est définie par les équations

$$(22)\qquad \begin{cases} 18u^2x + y - 6uz - 3u^4 = 0, \\ 36ux - 6z - 12u^3 = 0, \\ 36x - 36u^2 = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$x = u^2, \qquad y = 9u^4, \qquad z = 4u^3.$$

Soit $s$ l'arc de la courbe; on a

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{1+18u^2}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{18u^2}{1+18u^2}, \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{6u}{1+18u^2}.$$

On en conclut que la tangente fait un angle $\frac{\pi}{4}$ avec la droite de cosinus directeurs $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ : la courbe est donc une hélice, géodésique d'un cylindre à génératrices horizontales (n° 188).

Soient $(dx, dy, dz)$ et $(\delta x, \delta y, \delta z)$ deux déplacements infiniment petits sur la développable, dirigés l'un suivant une génératrice rectiligne, l'autre suivant une trajectoire orthogonale de ces génératrices, les deux déplacements ayant une origine commune. On aura

$$(23)\qquad \begin{cases} dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = 0, \\ 18u^2\delta x + \delta y - 6u\,\delta z = 0, \end{cases}$$

la deuxième équation exprimant que le déplacement $(\delta x, \delta y, \delta z)$ se fait dans le plan tangent P. Les génératrices rectilignes, définies par les deux premières équations (22), étant tangentes à l'arête de rebroussement, on aura

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{18u^2} = \frac{dz}{6u};$$

les équations (23) donnent donc

$$\delta x + 18u^2 \delta y + 6u \delta z = 0,$$
$$18u^2 \delta x + \delta y - 6u \delta z = 0,$$

d'où

$$\delta x + \delta y = 0, \qquad x + y = \text{Constante}.$$

Les trajectoires orthogonales cherchées sont les intersections de la développable et des plans

$$x + y = \text{Constante}.$$

Ces plans sont normaux à la droite de cosinus directeurs $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, c'est-à-dire aux génératrices du cylindre.

## CHAPITRE V

# ÉTUDE DES SURFACES EN COORDONNÉES CURVILIGNES

## § I. — Longueurs et aires.

**208.** Nous allons, dans ce paragraphe, rappeler, en les complétant, les notations et résultats du n° 85.

Une surface S est définie paramétriquement par les équations

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v),$$

que nous écrirons sous la forme d'une seule équation vectorielle

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(u, v).$$

On donne aux paramètres $u$ et $v$ le nom de *coordonnées curvilignes*, ou coordonnées de Gauss.

Le plan tangent au point $(x, y, z)$ a pour équation

$$\mathrm{A}(\mathrm{X} - x) + \mathrm{B}(\mathrm{Y} - y) + \mathrm{C}(\mathrm{Z} - z) = 0,$$

où l'on a

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(u, v)}, \qquad \mathrm{B} = \frac{\mathrm{D}(z, x)}{\mathrm{D}(u, v)}, \qquad \mathrm{C} = \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(u, v)}.$$

Le vecteur $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}$ donne donc la direction de la normale en M à la surface.

Nous poserons

$$(1) \qquad \mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\right)^2}} = \frac{\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}};$$

le vecteur **N** est un vecteur de longueur 1, dirigé suivant la normale, et tel que le trièdre

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}, \qquad \mathbf{N}$$

soit direct. Les cosinus directeurs de **N** sont évidemment

$$\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}}, \qquad \frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}}, \qquad \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}}.$$

Toute relation entre $u$ et $v$ définit une courbe de la surface. En particulier, les courbes $u = C^{te}$ et $v = C^{te}$ sont appelées *courbes coordonnées*.

Sur toute courbe de S, on a

$$d\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} dv,$$

d'où

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2,$$

avec

$$(2) \qquad \mathrm{E} = \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}\right)^2, \qquad \mathrm{F} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}, \qquad \mathrm{G} = \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\right)^2,$$

et

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = \mathrm{EG} - \mathrm{F}^2.$$

Si l'on appelle $\theta$ l'angle sous lequel se coupent en M les deux lignes coordonnées, on a (n° 85)

$$\cos\theta = \pm \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{EG}}}.$$

Quand la surface S est définie par l'équation

$$z = f(x, y),$$

on peut prendre $x = u$, $y = v$, et l'on a

$$\mathrm{E} = 1 + p^2, \qquad \mathrm{F} = pq, \qquad \mathrm{G} = 1 + q^2,$$

$p$ et $q$ désignant comme habituellement $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Rappelons encore (n° 86) que l'élément d'aire $d\sigma$ sur la surface S a pour expression

$$d\sigma = \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\, dudv.$$

Outre les six coefficients déjà connus,

$$\mathrm{A}, \quad \mathrm{B}, \quad \mathrm{C}, \quad \mathrm{E}, \quad \mathrm{F}, \quad \mathrm{G},$$

on utilise dans la théorie des surfaces trois autres coefficients que nous allons définir.

Sur toute courbe de la surface, $u$ et $v$ sont fonctions d'un paramètre $t$, et l'on a

$$d\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} dv,$$

$$d^2\mathbf{M} = \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v} dudv + \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} d^2u + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} d^2v,$$

les différentielles étant prises par rapport à $t$. On en tire, en posant

$$\mathbf{N} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2} = \mathrm{E}', \qquad \mathbf{N} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v} = \mathrm{F}', \qquad \mathbf{N} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2} = \mathrm{G}',$$

$$\mathbf{N} \cdot d^2\mathbf{M} = -d\mathbf{N} \cdot d\mathbf{M} = \mathrm{E}'du^2 + 2\mathrm{F}'dudv + \mathrm{G}'dv^2,$$

et par suite, puisque

$$\mathbf{N} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}},$$

$$\mathrm{E}' = \frac{\left(\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}, \dfrac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2}\right)}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}, \qquad \mathrm{F}' = \frac{\left(\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}, \dfrac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v}\right)}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}, \qquad \mathrm{G}' = \frac{\left(\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}, \dfrac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2}\right)}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}.$$

Les expressions $\mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2$ et $\mathrm{E}'du^2 + 2\mathrm{F}'dudv + \mathrm{G}'dv^2$ sont appelées les deux *formes quadratiques fondamentales* de la surface.

## § II. — Théorème de Meusnier. — Indicatrice.

**209.** Nous allons maintenant étudier la courbure des lignes tracées sur la surface S. Soient Γ une telle courbe, $s$ son arc; le long de Γ, $u$ et $v$ sont des fonctions de $s$, et l'on a

$$\mathbf{N} \cdot \frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2} = \frac{\mathrm{E}'du^2 + 2\mathrm{F}'dudv + \mathrm{G}'dv^2}{\mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2}.$$

D'autre part si l'on désigne par R le rayon de courbure de Γ en M, et par $\theta$ l'angle de **N** et de la normale principale positive, on aura

$$\mathbf{N} \cdot \frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2} = \frac{\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{n}}{\mathrm{R}} = \frac{\cos\theta}{\mathrm{R}}.$$

On en déduit

$$\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{E}'du^2 + 2\mathrm{F}'dudv + \mathrm{G}'dv^2}{\mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2}, \tag{3}$$

formule d'où nous allons tirer d'importantes conséquences.

Soient M un point de S, Π le plan tangent en M, P un plan passant par M et distinct de Π, Δ l'intersection des plans P et Π. Toutes les courbes de la surface qui passent en M et ont en ce point le plan P pour plan osculateur ont aussi pour tangente commune la droite Δ, et par suite admettent la même normale principale. Donc pour toutes ces courbes l'angle $\theta$ et le rapport $\frac{du}{dv}$ ont, au point M, la même valeur; il résulte de la formule (3) qu'elles ont aussi même rayon de courbure, car la valeur du second membre de cette formule au point M ne dépend que du rapport $\frac{du}{dv}$. En particulier toutes ces courbes auront même rayon de courbure que l'intersection de la surface S et du plan P. Nous sommes ainsi ramenés à étudier la courbure des sections planes de la surface.

Considérons les sections planes de la surface ayant même tangente MT au point M; pour toutes ces courbes la formule (3) montre que le rapport $\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}}$

conserve la même valeur. En particulier pour la section normale, c'est-à-dire la section par le plan TMN, on a $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ suivant que **MN** est dirigé vers le centre de courbure $O_1$ de la section ou en sens contraire; si donc on désigne par $\rho$ la valeur algébrique du segment $\overline{MO_1}$ compté positivement dans le sens **MN**, le rapport $\frac{\cos\theta}{R}$ sera égal, pour la section normale, à $\frac{1}{\rho}$, et par suite il sera égal à $\frac{1}{\rho}$ pour toutes les sections planes considérées.

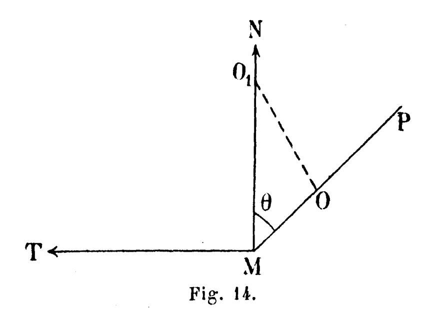


Fig. 14.

On aura donc la relation

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{1}{\rho},$$

d'où

$$R = \rho \cos\theta.$$

Soit alors O le centre de courbure de la section oblique faite par le plan TMP (*fig.* 14); la formule ci-dessus exprime que le point O est la projection du point $O_1$ sur le plan de la section. Nous obtenons donc le théorème suivant dû à MEUSNIER :

*Le centre de courbure d'une section oblique est la projection orthogonale, sur le plan de la section, du centre de courbure de la section normale qui a même tangente.*

**210**. Il ne nous reste donc plus qu'à étudier la courbure des sections normales. Nous suivrons pour cela les variations de la grandeur algébrique $\rho$ précédemment définie, qui renseigne à la fois sur la courbure d'une section normale et sur la position de son centre de courbure par rapport à la surface.

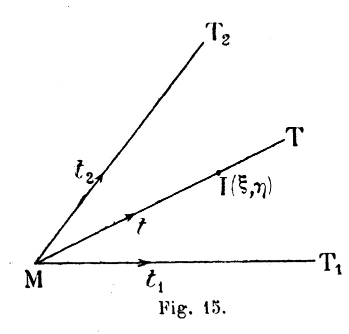


Fig. 15.

Menons dans le plan tangent les tangentes $MT_1$ et $MT_2$ aux courbes coordonnées

$$v = C^{te}, \qquad u = C^{te},$$

dirigées respectivement dans le sens des vecteurs $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}$. Soient MT la tangente à la section normale Γ considérée, $\mathbf{M}\boldsymbol{t}_1$, $\mathbf{M}\boldsymbol{t}_2$ et $\mathbf{M}\boldsymbol{t}$ des vecteurs de longueur 1 portés par les demi-droites $MT_1$, $MT_2$ et MT; on aura, λ et μ désignant des scalaires à déterminer,

$$\boldsymbol{t} = \lambda \boldsymbol{t}_1 + \mu \boldsymbol{t}_2.$$

D'ailleurs, sur $\Gamma$, $u$ et $v$ sont des fonctions de l'arc $s$, et l'on a

$$\boldsymbol{t} = \frac{d\mathbf{M}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\frac{dv}{ds},$$

$$\boldsymbol{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \qquad \boldsymbol{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v},$$

d'où

$$\boldsymbol{t} = \sqrt{\mathrm{E}}\frac{du}{ds}\boldsymbol{t}_1 + \sqrt{\mathrm{G}}\frac{dv}{ds}\boldsymbol{t}_2,$$

et par suite

$$\lambda = \sqrt{\mathrm{E}}\frac{du}{ds}, \qquad \mu = \sqrt{\mathrm{G}}\frac{dv}{ds}.$$

Ceci posé, à chaque direction de tangente MT correspond une section normale, celle qui est déterminée par le plan NMT. Pour suivre la variation de la courbure quand le plan sécant tourne autour de MN, prenons sur MT un point I (*fig.* 15) tel que

$$\mathbf{MI} = \sqrt{\rho}\,\boldsymbol{t};$$

le point I est réel ou imaginaire suivant que $\rho$ est positif ou négatif. Soient $(\xi, \eta)$ les coordonnées de I par rapport aux axes (obliques en général) $\mathrm{MT}_1$ et $\mathrm{MT}_2$ du plan tangent; on a

$$(4) \qquad \xi = \lambda\sqrt{\rho} = \sqrt{\rho}\sqrt{\mathrm{E}}\frac{du}{ds}, \qquad \eta = \mu\sqrt{\rho} = \sqrt{\rho}\sqrt{\mathrm{G}}\frac{dv}{ds}.$$

On a d'autre part, d'après (3),

$$(5) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{E}'du^2 + 2\mathrm{F}'du\,dv + \mathrm{G}'dv^2}{ds^2}.$$

Éliminons $\frac{du}{ds}$ et $\frac{dv}{ds}$ entre les équations (4) et (5); on aura l'équation du lieu de I sous la forme

$$\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{E}}\xi^2 + 2\frac{\mathrm{F}'}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\xi\eta + \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}}\eta^2 = 1.$$

C'est l'équation d'une conique de centre M; on l'appelle *indicatrice* de la surface au point M. Le genre de l'indicatrice est donné par le signe du discriminant $\frac{\mathrm{F}'^2 - \mathrm{E}'\mathrm{G}'}{\mathrm{EG}}$.

Si $\mathrm{F}'^2 - \mathrm{E}'\mathrm{G}' < 0$, l'indicatrice est une ellipse. Le second membre de la formule (3) conserve alors un signe constant quelle que soit la valeur du rapport $\frac{du}{dv}$. On en déduit que toutes les sections normales par des plans passant par MN tournent leur concavité du même côté du plan tangent : on dit alors qu'au point M la surface S est *convexe*.

Si $\mathrm{F}'^2 - \mathrm{E}'\mathrm{G}' > 0$, l'indicatrice est une hyperbole. Les sections normales tournent leur concavité tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre. On dit que la surface S est, au point M, *à courbures opposées*.

Enfin si $F'^2 - E'G' = 0$, l'indicatrice est du genre parabole : elle se décompose en deux droites parallèles symétriques par rapport à l'origine. On dit que le point M est un point *parabolique* de la surface.

**211.** Nous supposerons dans ce qui suit que l'indicatrice est une conique à centre non décomposée ($F'^2 - E'G' \neq 0$).

Dans une telle conique le carré du rayon vecteur issu du centre est maximum ou minimum quand le rayon vecteur est dirigé suivant les axes de la conique : cela est évident pour l'ellipse, et facile à vérifier pour l'hyperbole. Il en résulte que le rayon de courbure est maximum ou minimum pour les sections normales suivant les axes de l'indicatrice : on les appelle *sections normales principales*, et on donne aux rayons et centres de courbure correspondants les noms de rayons et centres de courbure *principaux* de la surface au point M.

Nous allons déterminer les directions des axes de l'indicatrice (*directions principales*) et les rayons de courbure principaux. Pour cela partons de la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{E'du^2 + 2F'du\,dv + G'dv^2}{Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2},$$

que nous écrirons

$$(6) \qquad (\rho E' - E)du^2 + 2(\rho F' - F)du\,dv + (\rho G' - G)dv^2 = 0.$$

A toute valeur de $\rho$ cette équation, qui est du second degré en $\frac{du}{dv}$, fait correspondre deux directions dans le plan tangent; il n'y a exception que quand on donne à $\rho$ sa valeur maximum ou minimum, qui correspond aux directions principales, puisque $\rho$ est égal au carré du rayon vecteur issu du centre : alors l'équation (6) doit avoir une racine double. On obtiendra donc les rayons de courbure principaux en écrivant que l'équation (6) a une racine double en $\frac{du}{dv}$, ce qui donne

$$(7) \qquad (\rho F' - F)^2 - (\rho E' - E)(\rho G' - G) = 0.$$

Cette équation est bien du second degré, car le coefficient de $\rho^2$ est $F'^2 - E'G'$, quantité que nous avons supposée différente de zéro. D'autre part, d'après la signification géométrique de $\rho$, elle a toujours des racines réelles : on le vérifie algébriquement en remarquant que le premier membre de l'équation (7) est positif pour $\rho = \frac{E}{E'}$ et négatif pour $\rho = 0$.

Cherchons maintenant les directions principales. Posons $\frac{du}{dv} = \lambda$; il faut trouver les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles l'expression

$$\frac{E\lambda^2 + 2F\lambda + G}{E'\lambda^2 + 2F'\lambda + G'}$$

est maximum ou minimum. En annulant la dérivée, on a

$$(E\lambda + F)(F'\lambda + G') - (F\lambda + G)(E'\lambda + F') = 0,$$

ou encore, en remplaçant $\lambda$ par $\frac{du}{dv}$,

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} E du + F dv & F du + G dv \\ E' du + F' dv & F' du + G' dv \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation qui définit les directions principales de la surface au point $(u, v)$. D'après leur signification géométrique, les racines de l'équation (8) sont toujours réelles : on le vérifie algébriquement en remarquant que le premier membre de l'équation en $\lambda$ prend des valeurs de signes contraires pour $\lambda = 0$ et $\lambda = -\frac{G}{F}$.

Prenons comme nouveaux axes dans le plan tangent les axes de l'indicatrice, MX et MY, et soient (X, Y) les coordonnées du centre de courbure I de la section normale NMT par rapport aux nouveaux axes, $\varphi$ l'angle de MT et de MX, enfin $\rho_1$ et $\rho_2$ les racines de l'équation (7). On aura, puisque $\rho_1$ et $\rho_2$ sont les carrés des demi-axes de l'indicatrice,

$$\frac{X^2}{\rho_1} + \frac{Y^2}{\rho_2} = 1\,;$$

d'ailleurs $\qquad X = \sqrt{\rho}\cos\varphi, \qquad Y = \sqrt{\rho}\sin\varphi\,;$

on en déduit la *formule d'*Euler

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2}.$$

**212.** On appelle *directions asymptotiques* sur la surface au point M les directions des asymptotes de l'indicatrice en ce point. En se reportant à l'équation de l'indicatrice

$$\frac{E'}{E}\xi^2 + 2\frac{F'}{\sqrt{EG}}\xi\eta + \frac{G'}{G}\eta^2 = 1,$$

on voit que ces directions sont données par l'équation

$$E' du^2 + 2F' du\, dv + G' dv^2 = 0.$$

Elles sont réelles et distinctes en tout point où la surface est à courbures opposées; les sections normales correspondantes ont alors un rayon de courbure infini, c'est-à-dire que le point M est un point d'inflexion sur chacune d'elles. Les directions asymptotiques sont imaginaires en un point où la surface est convexe. Enfin il y a une seule direction asymptotique, réelle, en tout point parabolique de la surface.

On appelle *ombilic* un point où les directions asymptotiques sont les

droites isotropes du plan tangent, c'est-à-dire un point où l'indicatrice est une circonférence. On sait que, pour que l'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

représente une circonférence en coordonnées obliques, l'angle des axes étant $\alpha$, il faut et il suffit qu'on ait

$$a = \frac{b}{\cos\alpha} = c.$$

D'ailleurs, les axes $MT_1$ et $MT_2$ étant choisis comme il a été dit au nº 210, on a ici (nº 208)

$$\cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

et l'équation de l'indicatrice peut s'écrire

$$\frac{E'}{E}\xi^2 + 2\frac{F'\cos\alpha}{F}\xi\eta + \frac{G'}{G}\eta^2 = 1;$$

les ombilics seront donc donnés par les équations

$$\frac{E'}{E} = \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G}. \tag{9}$$

Ces équations contenant deux inconnues, $u$ et $v$, les ombilics d'une surface sont en général en nombre limité. Il est évident qu'en un ombilic les directions principales sont indéterminées, puisque l'on peut prendre pour axes d'une circonférence deux diamètres rectangulaires quelconques : on voit d'ailleurs bien, analytiquement, que si les relations (9) sont vérifiées, le premier membre de l'équation (8), qui définit les directions principales, est identiquement nul.

Remarquons enfin que si l'on prend l'équation de la surface sous la forme

$$z = f(x, y),$$

on a, $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ ayant les significations habituelles,

$$E' = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad F' = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad G' = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

L'équation aux directions asymptotiques s'écrit

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0,$$

et les équations aux ombilics deviennent

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}.$$

**213.** Nous allons maintenant résoudre deux problèmes de Géométrie.

1[er] Problème. — *Trouver les surfaces dont tous les points sont paraboliques.*

Soit

$$z = f(x, y)$$

l'équation d'une telle surface. On devra avoir identiquement

$$s^2 - rt = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = 0.$$

Cette équation exprime qu'il existe, entre $p$ et $q$, une relation indépendante de $x$ et $y$, soit $q = \varphi(p)$.

Posons $u = px + qy - z$. On aura

$$\frac{\partial u}{\partial x} = rx + sy, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = sx + ty,$$

d'où

$$\frac{D(u, p)}{D(x, y)} = y(s^2 - rt) = 0.$$

Donc il existe aussi, entre $u$ et $p$, une relation indépendante de $x$ et $y$, soit $px + qy - z = \psi(p)$. L'équation du plan tangent

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0$$

s'écrit alors

$$pX + \varphi(p)Y - Z - \psi(p) = 0;$$

c'est l'équation d'une famille de plans à un paramètre, ce qui montre que les surfaces cherchées sont développables.

Le raisonnement serait en défaut si l'une des relations entre $q$ et $p$ ou entre $u$ et $p$ se réduisait à la forme $p = C^{te}$. Mais les surfaces correspondantes sont alors évidemment des cylindres, et par suite la conclusion subsiste.

Réciproquement toute surface développable répond à la question. En effet, le plan tangent

$$pX + qY - Z - (px + qy - z) = 0$$

ne devant dépendre que d'un paramètre, on a nécessairement une relation de la forme

$$\varphi(p, q) = 0,$$

d'où

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = rt - s^2 = 0.$$

2e Problème. — *Trouver les surfaces réelles dont tous les points sont des ombilics.*

Prenons les équations aux ombilics sous la forme

(10) $$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2},$$

et soient ($\lambda$, $\mu$, $\nu$) les cosinus directeurs de la normale en M à la surface. On a, au signe près,

$$\lambda = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \qquad \mu = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

d'où l'on déduit, compte tenu de (10),

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y}.$$

Par suite, $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$ ne pouvant dépendre que de $x$ et $\frac{\partial\mu}{\partial y}$ que de $y$, ces deux quantités se réduisent à une même constante,

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{1}{a}.$$

On en tire successivement

$$\lambda=\frac{x-x_0}{a}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad \mu=\frac{y-y_0}{a}=\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$p=\frac{x-x_0}{\pm\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}},\qquad q=\frac{y-y_0}{\pm\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}},$$

$$dz=\frac{(x-x_0)\,dx+(y-y_0)\,dy}{\pm\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}$$

et enfin $$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2:$$

c'est l'équation générale des sphères.

Les seules surfaces pour lesquelles le raisonnement puisse être en défaut sont les surfaces telles que

$$1+p^2+q^2=0,$$

qu'on appelle *développables isotropes*, et qui sont évidemment imaginaires. Donc les sphères sont les seules surfaces *réelles* dont tous les points soient des ombilics.

**214.** On peut dans certains cas trouver, par des considérations géométriques, les directions principales et les rayons de courbure principaux en un point.

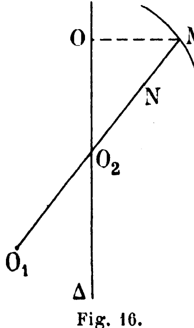


Fig. 16.

Prenons par exemple une surface de révolution autour d'un axe Δ. Le plan passant par M et Δ est un plan de symétrie Π de la surface. Menons la normale en M, soit MN. Deux plans passant par MN et symétriques par rapport au plan Π couperont la surface suivant deux courbes symétriques par rapport à Π, de telle sorte que ce plan est un plan de symétrie pour l'indicatrice. Il en résulte que la tangente au méridien passant par M est une direction principale; l'autre direction principale est donc tangente au parallèle. Un des centres de courbure principaux est évidemment le centre de courbure $O_1$ de la méridienne au point M; l'autre centre est celui de la section normale tangente au parallèle. Mais le parallèle est une section oblique dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre O est sur l'axe; donc, d'après le théorème de Meusnier, le centre de courbure de la section normale est le point $O_2$, intersection de Δ et de la normale en M.

## § III. — Lignes asymptotiques.

**215.** On appelle *lignes asymptotiques* d'une surface S les courbes de la surface qui sont tangentes en chacun de leurs points à l'une des asymptotes de l'indicatrice relative à ce point. Ces courbes sont donc définies par l'équation différentielle

$$E'du^2 + 2F'du dv + G'dv^2 = 0.$$

Cette équation différentielle étant du second degré en $\frac{du}{dv}$, il existe sur toute surface deux familles de lignes asymptotiques, qui sont imaginaires ou réelles suivant que la surface est convexe ou à courbures opposées.

Tout le long d'une ligne asymptotique, on aura, avec les notations usuelles,

$$\mathbf{N}.d\mathbf{M} = 0, \qquad \mathbf{N}.d^2\mathbf{M} = 0,$$

(n° 208). Il en résulte que le plan osculateur à une ligne asymptotique en un point est tangent à la surface en ce point. On peut prendre cette propriété comme définition :

*Une ligne asymptotique est une ligne telle que son plan osculateur soit constamment tangent à la surface.*

En tout point d'une surface passent deux lignes asymptotiques, réelles ou imaginaires, tangentes aux asymptotes de l'indicatrice.

Toute droite appartenant à une surface est une ligne asymptotique de la surface. En effet, le plan osculateur à une droite étant un plan quelconque passant par la droite, celle-ci satisfait évidemment à la définition des lignes asymptotiques, puisque d'autre part elle est dans le plan tangent.

Considérons une surface réglée quelconque

$$x = a(t)z + p(t), \qquad y = b(t)z + q(t), \qquad z = z,$$

où l'on a pris comme coordonnées curvilignes $t$ et $z$. On trouve aisément $G' = 0$, et l'équation aux asymptotiques s'écrit

$$[(b'z + q')(a''z + p'') - (a'z + p')(b''z + q'')]dt^2 + 2(a'q' - b'p')dt\,dz = 0.$$

Elle admet la solution évidente

$$dt = 0, \qquad \text{ou} \qquad t = C^{te};$$

on a bien ainsi les génératrices rectilignes.

Si la surface est développable, on a

$$a'q' - b'p' = 0,$$

et les deux familles d'asymptotiques sont confondues en une seule, savoir les génératrices rectilignes.

Si la surface est gauche, la seconde famille d'asymptotiques est définie par une équation de la forme

$$\frac{dz}{dt} = \alpha z^2 + \beta z + \gamma,$$

où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des fonctions de $t$; c'est une équation de RICCATI. Il résulte des propriétés de cette équation que si l'on connaît une asymptotique de la seconde famille, toutes les autres s'obtiendront par des quadratures.

On sait que sur toute quadrique il existe deux familles, réelles ou imaginaires, de génératrices rectilignes : ce seront donc les deux familles d'asymptotiques de la quadrique.

REMARQUE. — Pour former l'équation aux asymptotiques, on procède pratiquement de la façon suivante :

Soit $\mathbf{N}_1$ un vecteur de composantes $A_1$, $B_1$, $C_1$, proportionnelles aux jacobiens A, B, C. On aura

$$\mathbf{N} = k\mathbf{N}_1,$$

$k$ désignant une certaine fonction de $u$ et $v$, d'où

$$d\mathbf{N} = kd\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1 dk.$$

Or l'équation aux asymptotiques peut se mettre sous la forme

$$d\mathbf{N} \cdot d\mathbf{M} = 0,$$

ou, puisque

$$\mathbf{N}_1 . d\mathbf{M} = 0,$$

$$d\mathbf{N}_1 . d\mathbf{M} = 0,$$

c'est-à-dire finalement

$$dA_1 dx + dB_1 dy + dC_1 dz = 0.$$

On choisira $k$ de telle sorte que $A_1$, $B_1$, $C_1$ aient des expressions aussi simples que possible.

On simplifie de même le calcul des rayons de courbure principaux et des directions principales. Posons en effet

$$d\mathbf{N}_1 . d\mathbf{M} = - E'_1 du^2 - 2F'_1 du\, dv - G'_1 dv^2;$$

on aura

$$E'_1 = \frac{E'}{k}, \qquad F'_1 = \frac{F'}{k}, \qquad G'_1 = \frac{G'}{k}.$$

L'équation aux directions principales pourra donc s'écrire

$$\begin{vmatrix} E du + F dv & F du + G dv \\ E'_1 du + F'_1 dv & F'_1 du + G'_1 dv \end{vmatrix} = 0.$$

Enfin l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2},$$

d'où l'on est parti pour le calcul des rayons de courbure principaux, prend la forme

$$\frac{1}{k\rho} = \frac{E'_1 du^2 + 2F'_1 du dv + G'_1 dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2},$$

et le calcul se continue sans difficulté.

## § IV. — Directions conjuguées. Réseaux conjugués.

**216**. Rappelons d'abord quelques propriétés élémentaires des coniques.

Soit
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + H = 0$$
l'équation d'une conique rapportée à son centre, les axes étant quelconques. Coupons-la par une sécante
$$y = \lambda_1 x + a,$$
et soient M′ et M″ les points d'intersection, M le milieu de M′M″. On trouve, pour les coordonnées de M,

(11)
$$x = -a\frac{B + C\lambda_1}{A + 2B\lambda_1 + C\lambda_1^2}, \qquad y = a\frac{A + B\lambda_1}{A + 2B\lambda_1 + C\lambda_1^2}.$$

Si, laissant $\lambda_1$ constant, on fait varier $a$, le point M décrit le lieu des milieux des cordes parallèles au diamètre
$$y = \lambda_1 x.$$

Les équations (11) montrent que ce lieu a pour équation
$$y = -\frac{A + B\lambda_1}{B + C\lambda_1}x = \lambda_2 x;$$
c'est donc un second diamètre, et les coefficients $\lambda_1$ et $\lambda_2$ étant liés par la relation involutive

(12)
$$C\lambda_1\lambda_2 + B(\lambda_1 + \lambda_2) + A = 0,$$
le premier diamètre est aussi le lieu des milieux des cordes parallèles au second; ces deux diamètres sont dits *conjugués*. Ainsi :

*Géométriquement*, deux diamètres sont conjugués quand chacun d'eux est le lieu des milieux des cordes parallèles à l'autre.

*Analytiquement*, deux diamètres

(13)
$$y = \lambda_1 x, \qquad y = \lambda_2 x$$
sont conjugués quand leurs coefficients angulaires sont liés involutivement par la relation (12).

Il résulte de la définition géométrique que les axes de la conique sont deux directions conjuguées. Ce sont les seules directions conjuguées qui soient rectangulaires; en effet, pour que les deux diamètres (13) se coupent à angle droit, il faut qu'on ait, en appelant $\theta$ l'angle des axes,

(14)
$$1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\cos\theta + \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Les équations (12) et (14) donnent un seul système de valeurs pour $\lambda_1\lambda_2$ et $\lambda_1 + \lambda_2$, c'est-à-dire pour $\lambda_1$ et $\lambda_2$.

Il y a exception si les deux équations (12) et (14) forment un système indéterminé ou incompatible. Dans le second cas, il suffira de poser $\lambda_1 = \dfrac{1}{\mu_1}$,

$\lambda_2 = \frac{1}{\mu_2}$, et les équations (12) et (14) sont remplacées par un système compatible en $\mu_1 + \mu_2$ et $\mu_1\mu_2$, qui donne $\mu_1\mu_2 = 0$; l'une des racines $\lambda_1$ ou $\lambda_2$ est donc infinie, c'est-à-dire que l'un des axes de la conique est parallèle à l'axe des $y$. Dans le premier cas, on aura

$$C = \frac{B}{\cos\theta} = A\,;$$

la conique se réduit alors à une circonférence, et deux diamètres rectangulaires quelconques forment bien un système de diamètres conjugués : en dehors de ce cas, les seuls diamètres conjugués rectangulaires sont les axes de la conique.

Notons enfin que, d'après l'équation (12), il existe pour toute conique à centre deux directions dont chacune est conjuguée à elle-même : ce sont visiblement les directions asymptotiques.

**217**. On dit que deux directions en un point M d'une surface sont *conjuguées* si elles correspondent à deux diamètres conjugués de l'indicatrice en ce point. Reprenons l'équation de l'indicatrice

$$\frac{E'}{E}\xi^2 + 2\frac{F'}{\sqrt{EG}}\xi\eta + \frac{G'}{G}\eta^2 = 1.$$

Pour que les diamètres

$$\eta = \lambda_1\xi, \qquad \eta = \lambda_2\xi$$

soient conjugués, il faut et il suffit que l'on ait

$$(15) \qquad \frac{E'}{E} + 2\frac{F'}{\sqrt{EG}}(\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{G'}{G}\lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Soient $\frac{dv}{du}$ et $\frac{\delta v}{\delta u}$ les directions du plan tangent qui correspondent à ces diamètres conjugués; on tire des équations (4)

$$(16) \qquad \frac{dv}{du} = \lambda_1\sqrt{\frac{E}{G}}, \qquad \frac{\delta v}{\delta u} = \lambda_2\sqrt{\frac{E}{G}}.$$

En éliminant $\lambda_1$ et $\lambda_2$ entre les équations (15) et (16) on a

$$(17) \qquad E'du\delta u + F'(du\delta v + dv\delta u) + G'dv\delta v = 0.$$

Telle est, sur la surface, l'équation aux directions conjuguées.

Soient $\qquad f(u, v) = C^{te} \qquad$ et $\qquad \varphi(u, v) = C^{te}$

les équations de deux familles de courbes de la surface, telles que par tout point de la surface passe une courbe de chaque famille et une seule. Soient $(du, dv)$ et $(\delta u, \delta v)$ des déplacements infiniment petits sur chacune des courbes passant au point $M(u, v)$; on aura

$$\frac{dv}{du} = -\frac{f'_u}{f'_v}, \qquad \frac{\delta v}{\delta u} = -\frac{\varphi'_u}{\varphi'_v}.$$

Si, pour ces valeurs de $\frac{dv}{du}$ et $\frac{\delta v}{\delta u}$, l'équation (17) est vérifiée identiquement, on dit que les deux familles de courbes forment sur la surface un *réseau conjugué.* On voit que les fonctions $f$ et $\varphi$ sont alors telles que l'on ait

$$(18) \qquad E'\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F'\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + G'\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial u} \equiv 0.$$

Si l'on se donne arbitrairement sur la surface une famille de courbes

$$f(u, v) = C^{te},$$

on formera un réseau conjugué en lui adjoignant la famille définie par l'équation

$$\varphi(u, v) = C^{te},$$

où $\varphi$ est une solution quelconque de l'équation aux dérivées partielles (18), dont l'intégration se ramène, comme on sait, à celle d'une équation différentielle du premier ordre.

Cherchons en particulier à quelle condition les courbes coordonnées

$$u = C^{te}, \qquad v = C^{te}$$

forment sur la surface un réseau conjugué. L'équation (18) se réduit ici à

$$F' = 0.$$

Cette condition, qui peut s'écrire (n° 208)

$$\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}, \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v}\right) = 0,$$

sera vérifiée en particulier pour les surfaces telles que

$$x = f_1(u) + \varphi_1(v), \qquad y = f_2(u) + \varphi_2(v), \qquad z = f_3(u) + \varphi_3(v),$$

qui sont connues sous le nom général de *surfaces de translation* : les lignes coordonnées de chacun des deux systèmes se déduisent de l'une d'elles par translation.

**218.** Nous allons donner maintenant une définition géométrique des directions conjuguées.

Observons d'abord que l'on peut écrire avec les notations usuelles (n° 208)

$$E'du^2 + 2F'du\,dv + G'dv^2 = \mathbf{N}.d^2\mathbf{M} = \mathbf{N}.\left(\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2}dv^2\right),$$

d'où

$$E' = \mathbf{N}.\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2}, \qquad F' = \mathbf{N}.\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v}, \qquad G' = \mathbf{N}.\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2}.$$

En dérivant par rapport à $u$ et $v$ chacune des identités

$$\mathbf{N}.\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} = 0, \qquad \mathbf{N}.\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} = 0,$$

on obtient alors les relations

$$(19) \quad E' = -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \qquad F' = -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} = -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \qquad G' = -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}.$$

Soit maintenant C une courbe tracée sur la surface S. Le plan tangent $\Pi$ à S en un point M de C enveloppe, quand M décrit C, une surface développable, car c'est un plan mobile à un paramètre. Le plan $\Pi$ a pour équation, avec les notations vectorielles,

$$\mathbf{N}.\mathbf{MP}=0, \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{N}.(\mathbf{P}-\mathbf{M})=0;$$

en tout point P de la caractéristique on aura donc

$$\mathbf{N}.(\mathbf{P}-\mathbf{M})=0, \qquad \frac{d\mathbf{N}}{ds}.(\mathbf{P}-\mathbf{M})-\mathbf{N}.\frac{d\mathbf{M}}{ds}=0,$$

$s$ désignant l'arc de C, ou, puisque $\mathbf{N}.\frac{d\mathbf{M}}{ds}=0$,

$$\mathbf{N}.\mathbf{MP}=0, \qquad \frac{d\mathbf{N}}{ds}.\mathbf{MP}=0.$$

La caractéristique passe donc par le point M; soient MT la tangente à C, MT′ la caractéristique; je dis que ces deux directions sont conjuguées sur S.

Soient en effet $d\mathbf{M}(du,\, dv)$ un déplacement infiniment petit suivant MT, $\delta\mathbf{M}(\delta u,\, \delta v)$ un déplacement infiniment petit suivant MT′. On devra avoir

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds}.\delta\mathbf{M}=0; \tag{20}$$

mais $$\frac{d\mathbf{N}}{ds}=\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial u}\frac{du}{ds}+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial v}\frac{dv}{ds} \qquad \text{et} \qquad \delta\mathbf{M}=\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial u}\delta u+\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial v}\delta v;$$

l'équation (20) s'écrit donc, compte tenu des relations (19),

$$E'du\,\delta u+F'(du\,\delta v+dv\,\delta u)+G'dv\,\delta v=0:$$

c'est précisément l'équation qui exprime que les directions MT et MT′ sont conjuguées sur S.

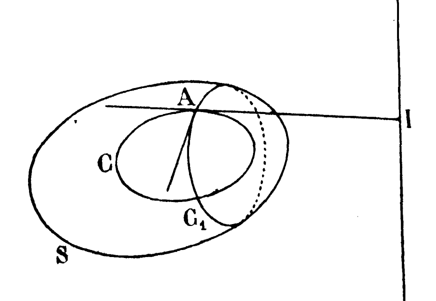


Fig. 17.

On peut donc prendre pour définition des directions conjuguées la propriété géométrique que nous venons d'indiquer. M. Kœnigs en a déduit un moyen très simple d'obtenir immédiatement et *sans quadrature* un réseau conjugué sur une surface quelconque : *les sections planes d'une surface* S *par les plans issus d'une droite fixe* $\Delta$ *et les courbes de contact des cônes circonscrits ayant leurs sommets sur* $\Delta$ *forment sur la surface* S *un réseau conjugué.*

En effet, soient C l'intersection de la surface S et d'un plan $\Pi$ issu de $\Delta$, $C_1$ la courbe de contact de S et du cône de sommet I, le point I étant sur $\Delta$, enfin A un point commun à C et $C_1$. La développable circonscrite à S le long

de $C_1$ étant précisément le cône de sommet I, la droite AI et la tangente en A à $C_1$ sont des directions conjuguées; mais AI, qui est une droite du plan $\Pi$ tangente à S, est évidemment tangente à C au point A : le théorème de M. Kœnigs en résulte immédiatement.

On voit sans peine ce que devient ce théorème quand la droite $\Delta$ est rejetée à l'infini.

## § V. — Lignes de courbure.

**219.** On appelle *ligne de courbure* d'une surface S une ligne tracée sur cette surface et tangente en chacun de ses points à l'un des axes de l'indicatrice en ce point. Les lignes de courbure sont donc définies par l'équation (8) (n° 211)

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} E du + F dv & F du + G dv \\ E' du + F' dv & F' du + G' dv \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est du second degré en $\frac{du}{dv}$; il résulte de la théorie des équations différentielles qu'en tout point de la surface (distinct d'un point singulier ou d'un ombilic) passent deux lignes de courbure qui s'y coupent à angle droit; d'après leur définition même, ces lignes sont toujours réelles, tandis qu'il n'en est pas nécessairement ainsi, comme nous l'avons vu, des lignes asymptotiques.

D'après ce que nous avons dit au paragraphe précédent, les lignes de courbure constituent sur la surface un réseau à la fois orthogonal et conjugué, et c'est le seul réseau possédant cette double propriété.

En un ombilic de la surface, les directions principales sont indéterminées; tous les points d'une sphère étant des ombilics, une ligne quelconque tracée sur la sphère doit être considérée comme une ligne de courbure.

N T M P C

Fig. 18.

Soit C une ligne de courbure de la surface S. Le plan tangent à S tout le long de C enveloppe une développable $\Delta$; soit MP sa caractéristique au point M. Menons la tangente MT à C et la normale MN à S au point M.

MP est la direction conjuguée de MT; elle lui est donc perpendiculaire, et par suite l'arête de rebroussement de $\Delta$, qui est l'enveloppe de MP, est une développée de C (n° 196). Or MN est constamment perpendiculaire à MP, donc elle reste aussi tangente à une développée de C, et par suite elle engendre une surface développable.

*Réciproquement*, soit C une courbe de S telle que la normale à S le long de C engendre une développable; MN restera tangente à une développée de C, et par suite il en sera de même de la droite MP menée dans le plan tangent

perpendiculairement à MT. Cette droite MP engendrera donc une développable circonscrite à S le long de C, et la caractéristique du plan tangent à S le long de C sera précisément, au point M, la droite MP. Les directions MT et MP, étant à la fois orthogonales et conjuguées, sont les directions principales, et par suite C est une ligne de courbure.

On peut donc définir géométriquement les lignes de courbure de la façon suivante :

*On appelle ligne de courbure d'une surface* S *une ligne* C *tracée sur* S *et telle que la normale à* S *le long de* C *engendre une développable.*

Il résulte immédiatement de cette définition que toute courbe tracée sur un plan doit être considérée comme une ligne de courbure du plan.

On peut déduire de ce qui précède une nouvelle forme de l'équation différentielle des lignes de courbure. Soient $\Gamma$ une ligne tracée sur S, M un point variable sur $\Gamma$, $\mathbf{N}_1$ le vecteur proportionnel à $\mathbf{N}$ de composantes (A, B, C), enfin P un point quelconque sur la normale en M à S. Cette normale engendre, quand M décrit $\Gamma$, une surface réglée d'équation

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} + \rho \mathbf{N}_1,$$

$\rho$ désignant un paramètre arbitraire, $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}_1$ des fonctions de l'arc $s$ de $\Gamma$; pour que cette courbe soit une ligne de courbure de S, il faut et il suffit que la surface réglée ci-dessus soit développable, ce qui s'écrit (n° 191)

$$\left(\frac{d\mathbf{M}}{ds}, \mathbf{N}_1, \frac{d\mathbf{N}_1}{ds}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(21) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ A & B & C \\ dA & dB & dC \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons encore que la surface S soit définie par une équation de la forme

$$z = f(x, y).$$

La normale au point $(x, y, z)$ a pour équations

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1},$$

c'est-à-dire

$$X = -pZ + (x + pz),$$
$$Y = -qZ + (y + qz).$$

Pour que cette droite engendre une surface développable, il faut et il suffit que l'on ait (n° 193)

$$\frac{d(x + pz)}{dp} = \frac{d(y + qz)}{dq},$$

ou

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq},$$

$$\frac{dx + p(p\,dx + q\,dy)}{r\,dx + s\,dy} = \frac{dy + q(p\,dx + q\,dy)}{s\,dx + t\,dy},$$

ou enfin

$$[(1+p^2)dx+pq\,dy](s\,dx+t\,dy)-[pq\,dx+(1+q^2)dy](r\,dx+s\,dy)=0;$$

telle est l'équation qui définit dans ce cas les lignes de courbure.

**220. Théorème de Joachimsthal.** — *Si l'intersection de deux surfaces est une ligne de courbure sur chacune d'elles, elles se coupent sous un angle constant tout le long de cette ligne.*

En effet, soient M un point de l'intersection C, $MN_1$ et $MN_2$ les normales aux deux surfaces en ce point; $MN_1$ et $MN_2$ restent tangentes à deux développées de C, et par suite (n° 196) elles font un angle constant.

*Réciproquement, si deux surfaces se coupent sous un angle constant, et si leur intersection est une ligne de courbure pour l'une, elle l'est aussi pour l'autre.*

En effet, si $MN_1$ par exemple reste tangente à une développée de C, il en sera de même de $MN_2$ qui fait avec $MN_1$ un angle constant : donc C est aussi une ligne de courbure sur la seconde surface.

COROLLAIRE. — *Si un plan ou une sphère coupe une surface quelconque sous un angle constant, l'intersection est une ligne de courbure de la surface.*

REMARQUE. — Une surface S dont toutes les normales concourent en un point fixe O est une sphère de centre O. En effet, prenons le point O comme origine; on aura, avec les notations habituelles, en désignant par M un point de la surface et par $\rho$ la distance OM,

$$\mathbf{M}=\rho\mathbf{N},$$

d'où

$$d\mathbf{M}=\mathbf{N}\,d\rho+\rho\,d\mathbf{N}.$$

Multiplions scalairement par $\mathbf{N}$; il reste

$$d\rho=0, \qquad \rho=OM=C^{te}.$$

Le théorème de JOACHIMSTHAL permet alors d'établir très simplement que toute surface réelle dont tous les points sont des ombilics est une sphère. En effet, soit S une telle surface : toute ligne tracée sur S est ligne de courbure de S, donc tout plan coupe S sous un angle constant. Soient alors A et B deux points quelconques de S : le plan normal en A qui passe par B est aussi normal en B, donc deux normales quelconques sont concourantes, ce qui n'est possible que si toutes les normales concourent en un seul point.

**221.** On utilise assez souvent avec avantage, dans la recherche des lignes de courbure, des considérations géométriques.

Par exemple il résulte des remarques du n° 214 que sur toute surface de révolution les méridiens et les parallèles constituent les deux familles de lignes de courbure. On peut encore le vérifier en remarquant que les normales à la surface engendrent un plan le long d'un méridien et un cône le long d'un

parallèle. Signalons en passant que si la méridienne coupe l'axe de révolution à angle droit, le point d'intersection sera un ombilic de la surface; si elle le coupait obliquement, le point d'intersection donnerait un point conique de la surface.

Prenons maintenant les surfaces développables. Les génératrices rectilignes forment une première famille de lignes de courbure, puisque les normales à la surface le long d'une génératrice rectiligne engendrent un plan. L'autre famille de lignes de courbure sera formée des développantes de l'arête de rebroussement.

On donne le nom de *surface canal* à la surface S enveloppe d'une sphère Σ de rayon constant R, dont le centre décrit une courbe quelconque Γ. Deux sphères quelconques se coupent suivant un petit cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne des centres; il en résulte que la caractéristique de la sphère Σ de centre M, est un cercle de rayon R dont le plan est perpendiculaire à la tangente MT à Γ : Σ et S étant tangents le long de ce cercle (n° 205), c'est une ligne de courbure de S, d'après le théorème de JOACHIMSTHAL. Ainsi une première famille de lignes de courbure se compose de cercles de rayon R ayant leurs centres sur Γ et situés dans les plans normaux à Γ.

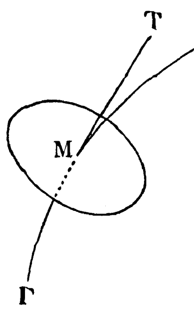


Fig. 19.

D'une façon plus générale, on voit de même que toute surface enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre admet comme première famille de lignes de courbure des circonférences. *Réciproquement*, si une surface admet comme lignes de courbure une famille de circonférences, elle peut être considérée comme l'enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre. En effet, d'après le théorème de JOACHIMSTHAL, la sphère qui passe par une circonférence ligne de courbure et qui est tangente à la surface en un point de cette circonférence lui est tangente tout le long de la circonférence, ce qui prouve bien que l'on peut considérer la surface comme l'enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre.

Si les deux familles de lignes de courbure d'une surface S sont des circonférences, il résulte de ce qui précède que S pourra être considérée de deux façons comme l'enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre. Soient $\Sigma_1$ une sphère de la première famille, $C_1$ sa courbe de contact avec S; par tout point de $C_1$ passe une ligne de courbure de la seconde famille, c'est-à-dire que toute sphère de la seconde famille est tangente à $\Sigma_1$ en un point de $C_1$. Prenons alors trois sphères $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ de la première famille; il est facile de constater que les sphères tangentes à trois sphères fixes forment une famille de sphères à un paramètre, donc la seconde famille de sphères se compose des sphères tangentes à $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$. Ainsi la surface dont les deux familles de lignes de courbure sont des circonférences est l'enveloppe des sphères tangentes à trois sphères fixes. Cette surface porte le nom de *cyclide de* DUPIN.

**222. Systèmes triples orthogonaux.** — Considérons le système d'équations

$$x = f(\rho_1, \rho_2, \rho_3), \qquad y = g(\rho_1, \rho_2, \rho_3), \qquad z = h(\rho_1, \rho_2, \rho_3).$$

A tout système de valeurs des paramètres $\rho_1, \rho_2, \rho_3$, ces équations font correspondre un point M de coordonnées $x$, $y$, $z$ par rapport à trois axes *rectangulaires* O$x$, O$y$, O$z$. Nous poserons, comme habituellement,

(22)
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\rho_1, \rho_2, \rho_3).$$

Si l'on a

$$\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_1}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_2}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_3}\right) \neq 0,$$

ce que nous supposerons dans la suite, à tout point de l'espace correspondra inversement un système de valeurs des paramètres $\rho_i$.

Si on laisse $\rho_i$ constant, le point M décrira une surface $S_i$ que nous dirons appartenir à la famille $(\rho_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. On peut donc dire qu'un point quelconque de l'espace est déterminé par l'intersection de trois surfaces appartenant aux familles $(\rho_1)$, $(\rho_2)$ et $(\rho_3)$ respectivement.

Supposons maintenant que deux surfaces quelconques, appartenant à deux familles différentes du système, se coupent à angle droit tout le long de leur intersection : l'équation (22) définit dans ce cas un *système triple orthogonal.* Alors sur une surface quelconque de la famille $(\rho_1)$, par exemple, les courbes

$$\rho_2 = C^{te}, \qquad \rho_3 = C^{te}$$

forment un réseau orthogonal, et l'on a

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_3} = 0.$$

On a de même

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_3} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_2} = 0.$$

Dérivons ces identités par rapport à $\rho_1$, $\rho_2$ et $\rho_3$ respectivement; on aura

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \rho_3 \partial \rho_1} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_3} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_3} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_1} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \rho_2 \partial \rho_3} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_1} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \rho_2 \partial \rho_3} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \rho_3 \partial \rho_1} = 0,$$

et par suite

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_1} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \rho_2 \partial \rho_3} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \rho_3 \partial \rho_1} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_3} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = 0.$$

Considérons alors une surface $S_1$ de la famille $(\rho_1)$ : l'équation (22), où $\rho_1$ est constant, représente cette surface en coordonnées curvilignes $\rho_2$ et $\rho_3$. On a d'ailleurs identiquement

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_2} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_3} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_1} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \rho_2 \partial \rho_3} = 0;$$

les vecteurs $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_2}$, $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_3}$ et $\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \rho_2 \partial \rho_3}$, étant perpendiculaires à un même vecteur $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_1}$, sont coplanaires, et par suite on a aussi

$$\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_2}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_3}, \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \rho_2 \partial \rho_3}\right) = 0,$$

relation qui exprime (n° 217) que les lignes

$$\rho_2 = C^{te} \quad \text{et} \quad \rho_3 = C^{te}$$

forment sur $S_1$ un réseau conjugué. Ce réseau est aussi orthogonal, puisque

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_3} = 0,$$

donc c'est le réseau des lignes de courbure. Nous obtenons ainsi le théorème dû à DUPIN :

*Les surfaces d'un système triple orthogonal se coupent suivant leurs lignes de courbure.*

Il est clair, en effet, que sur la surface $S_1$, les lignes

$$\rho_2 = C^{te},$$

par exemple, sont les intersections de $S_1$ et des surfaces de la famille $(\rho_2)$.

**223.** REMARQUES. I. — Il importe de bien faire la distinction entre les lignes de courbure et les sections normales principales. Les sections normales principales ont pour centres et rayons de courbure les centres et rayons de courbure principaux de la surface, mais il n'en est pas ainsi des lignes de courbure : en particulier la normale principale à une ligne de courbure n'est pas dirigée suivant la normale à la surface, sauf dans le cas exceptionnel où cette ligne de courbure serait en même temps géodésique.

De même la section normale en M suivant une direction asymptotique présente en général un point d'inflexion en M, correspondant à un rayon de courbure infini (form. 5); mais il n'en est pas de même de la ligne asymptotique correspondante : elle a en général au point M un rayon de courbure fini, dont la valeur ne peut d'ailleurs se tirer de la formule générale (3), car on a par définition $\theta = \frac{\pi}{2}$, et cette formule donne pour R une expression de la forme $\frac{0}{0}$.

II. — Soient $\rho_1$ et $\rho_2$ les racines de l'équation (7)

$$(\rho F' - F)^2 - (\rho E' - E)(\rho G' - G) = 0,$$

qui sert à calculer les rayons de courbure principaux. On donne à l'expression

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$$

le nom de *courbure moyenne*, et à l'expression

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2}$$

le nom de *courbure totale* de la surface au point M.

Les surfaces dont la courbure moyenne est constamment nulle ont reçu le nom de *surfaces minima*; elles sont caractérisées, d'après ce qui précède, par la relation

$$E'G - 2FF' + EG' = 0.$$

En particulier, si l'équation de la surface est prise sous la forme $z = f(x, y)$, la relation précédente s'écrit, avec les notations habituelles,

$$r(1 + q^2) - 2pqs + t(1 + p^2) = 0;$$

c'est l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima.

En tout point d'une surface minima, l'indicatrice est une hyperbole équilatère, puisque les carrés des demi-axes sont égaux et de signes contraires. Les directions asymptotiques sont alors rectangulaires en tout point de la surface, et réciproquement.

En ce qui concerne la courbure totale,

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{E'G' - F'^2}{EG - F^2},$$

Gauss en a découvert une propriété fort importante, à savoir qu'elle peut s'exprimer au moyen des coefficients E, F, G et de leurs dérivées, ce qui entraîne, nous le verrons plus tard, que la courbure totale se conserve dans toute *déformation* de la surface.

Le calcul n'offre pas de difficulté. On part des formules

$$E' = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}, \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2}\right), \qquad F' = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}, \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v}\right),$$
$$G' = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}, \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2}\right),$$

et l'on en déduit, en appliquant la règle de multiplication des déterminants,

$$(EG - F^2)E'G' = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}\right)^2 & \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} & \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2} \\ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} & \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\right)^2 & \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} & \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} & \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F & \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2} \\ F & G & \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} & \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} & \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2} \end{vmatrix},$$

et de même

$$(EG - F^2)F'^2 = \begin{vmatrix} E & F & \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v} \\ F & G & \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} & \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} & \left(\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v}\right)^2 \end{vmatrix}.$$

En faisant le développement des déterminants, on voit que les seuls produits scalaires qui contiennent deux dérivées du second ordre, savoir $\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2}$ et $\left(\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v}\right)^2$, figureront, dans chacun des déterminants, avec le même coefficient, $\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2$; pour établir le théorème de GAUSS, il suffira donc de montrer que les scalaires

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v}\right)^2$$

s'expriment au moyen de E, F, G et leurs dérivées. Or, des équations de définition

$$\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}\right)^2 = \mathrm{E}, \qquad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} = \mathrm{F}, \qquad \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\right)^2 = \mathrm{G},$$

on tire aisément, en dérivant alternativement par rapport à $u$ et $v$, les six relations

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}, \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}, \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v};$$

dérivant la troisième par rapport à $u$, la seconde par rapport à $v$, on a, par soustraction,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v}\right)^2 = \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial u^2}\right),$$

et le théorème de GAUSS en résulte immédiatement.

## § VI. — Lignes géodésiques.

**224.** Nous allons maintenant traiter, relativement à une surface quelconque, un important problème de variation.

Soient A et B deux points déterminés sur cette surface. Proposons-nous de déterminer une courbe de la surface joignant ces deux points, et dont la longueur soit un extremum. En désignant par $s$ l'arc de la courbe, nous aurons à annuler la variation de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{AB}} ds.$$

Reprenant les notations du n° 78 relatives au calcul des variations, on voit immédiatement que la commutativité des lettres $d$ et $\delta$ s'applique encore dans le domaine vectoriel.

Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs quelconques; on aura

$$\delta \sqrt{\mathbf{u} . \mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u} . \delta \mathbf{v} + \mathbf{v} . \delta \mathbf{u}}{2\sqrt{\mathbf{u} . \mathbf{v}}}.$$

En particulier, $u$ désignant comme d'habitude la longueur du vecteur $\mathbf{u}$, on a

$$\delta \sqrt{(\mathbf{u})^2} = \frac{\mathbf{u} . \delta \mathbf{u}}{\sqrt{(\mathbf{u})^2}} = \frac{\mathbf{u}}{u} . \delta \mathbf{u}.$$

Ceci posé, on a successivement, en remarquant que $d\mathbf{M}$ est un vecteur de longueur $ds$,

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{AB}} \sqrt{(d\mathbf{M})^2},$$

$$\delta \mathrm{I} = \int_{\mathrm{AB}} \frac{d\mathbf{M}}{ds} \cdot \delta\, d\mathbf{M} = \int_{\mathrm{AB}} \frac{d\mathbf{M}}{ds} \cdot d\,\delta \mathbf{M} = \left| \frac{d\mathbf{M}}{ds} \cdot \delta \mathbf{M} \right|_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} - \int_{\mathrm{AB}} \delta \mathbf{M} \cdot d\frac{d\mathbf{M}}{ds}.$$

Or les variations aux limites sont nulles, puisque les points A et B sont fixes; on a d'ailleurs, avec les notations usuelles,

$$d\frac{d\mathbf{M}}{ds} = d\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{n}\,ds}{\mathrm{R}}.$$

L'équation $\delta \mathrm{I} = 0$ se réduit donc à

$$\boldsymbol{n} . \delta \mathbf{M} = 0$$

(n° 79). Dans cette relation, le vecteur $\delta \mathbf{M}$ est seulement assujetti à se trouver dans le plan tangent à la surface, donc la relation

$$\mathbf{N} . \delta \mathbf{M} = 0$$

doit entraîner

$$\boldsymbol{n} . \delta \mathbf{M} = 0,$$

ce qui n'est possible que si l'on a

$$\boldsymbol{n} = \pm \mathbf{N},$$

c'est-à-dire si la normale principale à la courbe coïncide avec la normale à la surface.

On donne aux courbes possédant cette propriété le nom de *lignes géodésiques* de la surface. Par exemple les géodésiques d'une sphère sont les grands cercles, car les normales principales forment dans ce cas une développable (cône), ce qui n'est possible (n° 194) que si la courbe correspondante est plane.

On peut former de la façon suivante l'équation différentielle des lignes géodésiques. Soit $v = f(u)$ l'équation d'une telle ligne; on aura

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{AB}} ds = \int_{\mathrm{AB}} \sqrt{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}v' + \mathrm{G}v'^2}\, du = \int_{\mathrm{AB}} \varphi(u, v, v')\, du,$$

et l'équation

$$\delta \mathrm{I} = 0$$

est équivalente (n° 79) à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{d}{du}\frac{\partial \varphi}{\partial v'} = 0; \tag{23}$$

c'est l'équation différentielle des géodésiques.

La détermination des géodésiques d'une surface se fait aussi très simplement à l'aide de considérations empruntées à la dynamique du point. Considérons un point mobile sans frottement sur la surface, et soustrait à l'action de toute force extérieure; la seule force qui agisse sur lui est la réaction

normale de la surface, et l'on sait que cette force est dirigée suivant la normale principale à la trajectoire : celle-ci est donc une géodésique de la surface.

Prenant alors la masse du point égale à 1, désignons par des accents les dérivées par rapport au temps. On aura, avec les notations habituelles de la dynamique,

$$2T = \frac{ds^2}{dt^2} = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2,$$
$$U = 0.$$

Les équations de Lagrange donnent ensuite

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u'} - \frac{\partial T}{\partial u} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v'} - \frac{\partial T}{\partial v} = 0;$$

l'une de ces équations, la plus compliquée, sera remplacée par l'équation des forces vives

$$Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = C^{te}.$$

L'intégration de ces équations donnera les géodésiques de la surface.

Revenons à l'équation (23), et supposons que les courbes coordonnées forment sur la surface S un système orthogonal. On aura $F = 0$; l'équation (23) prend alors la forme

$$\frac{1}{2\sqrt{E + Gv'^2}}\left(\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial v}v'^2\right) - \frac{Gv''}{\sqrt{E + Gv'^2}} - v'\frac{d}{du}\frac{G}{\sqrt{E + Gv'^2}} = 0.$$

Pour que, sur la surface S, les courbes $v = C^{te}$ soient des géodésiques, *il faut et il suffit* que l'équation ci-dessus admette l'intégrale $v = C^{te}$, c'est-à-dire que l'on ait $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$. Le coefficient E ne doit donc dépendre que de $u$, et le $ds^2$ de la surface sera de la forme

$$ds^2 = E(u)du^2 + G(u, v)dv^2;$$

il suffira alors de remplacer $u$ par $\int \sqrt{E}\,du$ pour obtenir la *forme géodésique de l'élément linéaire*,

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2.$$

Ainsi quand le $ds^2$ d'une surface est mis sous la forme précédente, les courbes $v = C^{te}$ forment sur cette surface une famille de géodésiques.

Si la surface S est une sphère, on peut prendre comme courbes $v = C^{te}$ les grands cercles orthogonaux à une courbe donnée $\Gamma$; les courbes $u = C^{te}$ sont alors les trajectoires orthogonales de ces grands cercles. On vérifie aisément que deux trajectoires déterminées interceptent sur tout grand cercle orthogonal un arc constant; de plus, les tangentes en deux points situés sur le même grand cercle sont parallèles. Ces courbes jouissent donc de propriétés analogues aux courbes planes parallèles, et on les appelle pour cette raison *courbes parallèles*.

Par extension, sur une surface quelconque, les trajectoires orthogonales des géodésiques $v = C^{te}$ sont aussi nommées *courbes parallèles*, bien que la propriété du parallélisme des tangentes ne subsiste pas.

Il résulte de la théorie des équations différentielles, l'équation (23) étant du second

ordre, qu'une géodésique sera complètement déterminée par la condition de passer par un point et d'avoir en ce point une tangente donnée.

REMARQUE. — Dans une région suffisamment petite d'une surface S, l'arc de géodésique joignant deux points $M_0$ et $M_1$ est un chemin *minimum*.

Soient en effet $(u_0, v_0)$, $(u_1, v_1)$ les coordonnées des deux points $M_0$ et $M_1$. Un arc *quelconque* allant de $M_0$ en $M_1$ est défini par une équation de la forme $v = \theta(u)$, avec les conditions aux limites $v_0 = \theta(u_0)$, $v_1 = \theta(u_1)$. Le $ds^2$ de la surface étant mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2,$$

on aura, sur la courbe considérée,

$$\text{arc}\, M_0M_1 = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1 + G(u, \theta)\theta'^2}\, du,$$

donc

$$\text{arc}\, M_0M_1 \geqslant | u_1 - u_0 |,$$

le cas d'égalité correspondant au cas où $\theta' = 0$, c'est-à-dire au cas des lignes géodésiques.

Il est clair que ce calcul suppose vérifiées des conditions de continuité et d'uniformité qui ne seront réalisées, du moins dans le cas général, qu'en des portions bornées de la surface S.

## § VII. — Développée d'une surface.

**225.** Nous avons vu précédemment (n° 206) qu'une congruence de courbes admettait en général une surface enveloppe, ou surface focale. Or les normales à une surface S forment bien une congruence, car leurs équations contiennent les deux paramètres $u$ et $v$ qui fixent le pied de la normale sur la surface; elles enveloppent donc une surface $\Sigma$, qui est appelée la *développée* de S.

Soit

$$f(u, v, \alpha) = 0$$

l'équation d'une famille de lignes de courbure de S. A chaque valeur de $\alpha$ correspond une ligne de courbure $(\alpha)$; la normale à S le long de $(\alpha)$ reste, comme on sait, tangente à une développée de $(\alpha)$. Quand $\alpha$ varie, cette développée engendre une surface $\Sigma_1$, et l'on voit que toutes les normales à S sont tangentes à $\Sigma_1$ : la surface $\Sigma_1$ constitue une *nappe* de la développée.

A chaque ligne de courbure de S correspond la développable engendrée par les normales à S le long de cette ligne de courbure : on donne à ces développables le nom de *normalies*. Il y a donc deux familles de normalies associées à S, correspondant aux deux familles de lignes de courbure. La surface $\Sigma_1$ est le lieu des arêtes de rebroussement des normalies de la première famille.

Aux normalies de la seconde famille correspond de même une surface $\Sigma_2$, lieu des arêtes de rebroussement : c'est la seconde nappe de la développée. En général, les deux nappes $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ ne seront pas analytiquement distinctes, c'est-à-dire seront représentées par une seule équation : mais dans certains cas particuliers, elles pourront être analytiquement distinctes.

Soit P un point quelconque de la normale en M; on aura

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} + \rho \mathbf{N},$$

et cette équation, où **M** et **N** sont des fonctions de $u$ et $v$, représente la congruence des normales. Les points où la normale en M touche la surface focale sont définis (n° 206) par l'équation

$$\left(\mathbf{N}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} + \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} + \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}\right) = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\mathbf{N} \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} + \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}\right) \wedge \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} + \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}\right)\right] = 0,$$

ou encore, d'après (1),

$$\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\right) \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} + \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}\right) \wedge \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} + \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}\right)\right] = 0,$$

ou enfin, d'après l'identité de Lagrange généralisée (n° 177),

$$\left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} + \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}\right)\right] \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} + \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}\right)\right]$$
$$- \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} + \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}\right)\right] \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} + \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}\right)\right] = 0.$$

Cette dernière équation s'écrit encore, compte tenu des relations (2) et (19),

$$(E - \rho E')(G - \rho G') - (F - \rho F')^2 = 0,$$

et comme elle est identique à l'équation (7), qui définit les rayons de courbure principaux, nous avons le résultat suivant :

*Les points où la normale en* M *touche la développée de* S *sont les centres de courbure principaux en* M.

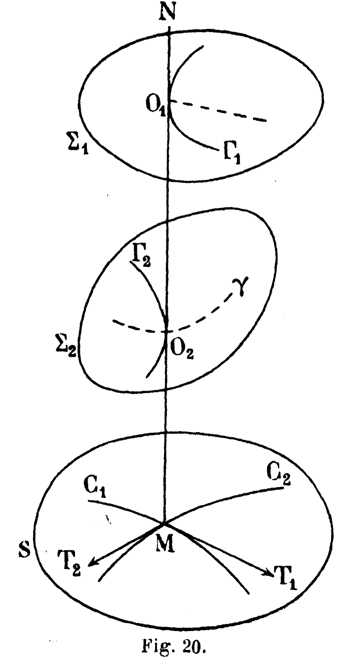


Fig. 20.

**226**. Menons la normale MN en M à S, et soient $O_1$ et $O_2$ les centres de courbure principaux en M : ce sont les points de contact de MN avec $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$, les deux nappes de la développée. Soient $C_1$ et $C_2$ les deux lignes de courbure qui passent en M, $MT_1$ et $MT_2$ les tangentes à ces lignes. Les normalies $D_1$ et $D_2$ relatives à $C_1$ et $C_2$ ont respectivement leurs arêtes de rebroussement $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ sur $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$, et MN est tangente en $O_1$ à $\Gamma_1$, en $O_2$ à $\Gamma_2$.

Quand M décrit $C_1$, MN enveloppe $\Gamma_1$, et en même temps elle reste tangente à $\Sigma_2$; soit $\gamma$ la courbe décrite sur $\Sigma_2$ par le point de contact. Cette courbe $\gamma$ est située sur la normalie $D_1$; donc le plan tangent en $O_2$ à $\Sigma_2$ se confond avec le plan tangent à $D_1$ le long de MN. Mais la courbe $C_1$ étant aussi sur $D_1$, le plan tangent en M à $D_1$ n'est autre

que le plan $NMT_1$, donc le plan $NMT_1$ est tangent en $O_2$ à $\Sigma_2$, et de même le plan $NMT_2$ est tangent en $O_1$ à $\Sigma_1$. Ainsi *les plans tangents à la développée menés par une même normale* MN *sont rectangulaires.*

Remarquons encore que le plan $NMT_1$ est osculateur en $O_1$ à $\Gamma_1$. Or il est perpendiculaire au plan $NMT_2$, tangent en $O_1$ à $\Sigma_1$, donc la normale principale en $O_1$ à $\Gamma_1$, qui est, dans le plan $NMT_1$, perpendiculaire à MN, est aussi perpendiculaire au plan $NMT_2$; c'est donc la normale en $O_1$ à $\Sigma_1$. Il en résulte que $\Gamma_1$ est une géodésique de $\Sigma_1$. Ainsi *les arêtes de rebroussement des normalies sont des géodésiques de la développée.*

Soit $\rho_1$ la racine de l'équation (7) correspondant à $O_1$. On a

$$\mathbf{O}_1 = \mathbf{M} + \rho_1 \mathbf{N}, \qquad d\mathbf{O}_1 = d\mathbf{M} + \rho_1 d\mathbf{N} + \mathbf{N} d\rho_1;$$

multipliant scalairement par **N**, on voit que

$$\mathbf{N} . d\mathbf{O}_1 = d\rho_1.$$

D'ailleurs les vecteurs **N** et $d\mathbf{O}_1$ ont même direction, savoir la tangente en $O_1$ à $\Gamma_1$; posant donc

$$d\mathbf{O}_1 = \lambda \mathbf{N},$$

on aura

$$\mathbf{N} . d\mathbf{O}_1 = \lambda = d\rho_1,$$

puis

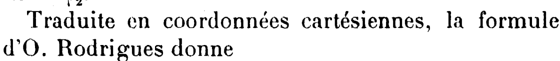
$$d\mathbf{O}_1 = \mathbf{N} d\rho_1,$$

et enfin

$$d\mathbf{M} + \rho_1 d\mathbf{N} = 0.$$

C'est la *formule d'*OLINDE RODRIGUES; dans cette formule, les différentielles sont relatives à un déplacement infiniment petit suivant la direction principale qui correspond à la racine $\rho_1$ de l'équation (7). On a, bien entendu, une formule analogue pour la racine $\rho_2$.

Traduite en coordonnées cartésiennes, la formule d'O. Rodrigues donne



$$dx + \rho_1 d\alpha = 0, \quad dy + \rho_1 d\beta = 0, \quad dz + \rho_1 d\gamma = 0,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ désignant les cosinus directeurs de la normale en M à la surface.

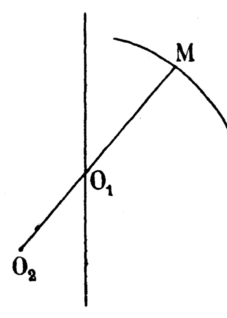



Fig. 21.

REMARQUE. — Il peut arriver que l'une des nappes de la développée, ou même les deux nappes, se réduisent à une courbe ou à un point.

Par exemple, pour une sphère les deux nappes de la développée se réduisent au centre de la sphère.

Pour une surface enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre (n° 221), l'une des nappes de la développée se réduit à la courbe lieu du centre des sphères, car toutes les normales à la surface rencontrent évidemment cette courbe. En particulier, la développée de la cyclide de DUPIN se compose de deux courbes; on démontre que ces courbes sont des coniques.

Pour une surface de révolution, considérons une section méridienne quelconque. Nous avons vu (nº **214**) que les centres de courbure principaux en M sont : l'un, $O_1$, l'intersection de la normale en M avec l'axe, l'autre, $O_2$, le centre de courbure de la méridienne en M. Quand M décrit la méridienne, $O_1$ décrit l'axe, et $O_2$ décrit la développée de la méridienne. Donc la première nappe de la développée se réduira à l'axe; la seconde nappe sera une surface de révolution, dont la méridienne est précisément la développée plane de la méridienne de la première surface.

## § VIII. — Normale géodésique; courbure géodésique. Torsion relative; formule d'Ossian Bonnet.

**227.** Étant donnée une courbe C tracée sur une surface S que nous supposons rapportée à un système de coordonnées $(u, v)$, nous avons désigné par $\mathbf{N}$ le vecteur unitaire porté par la normale en M à S et tel que le trièdre $\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}, \mathbf{N}\right)$ soit direct, par $\boldsymbol{n}$ le vecteur unitaire porté par la normale principale en M à C dans la direction du centre de courbure, enfin par $\theta$ l'angle des vecteurs $\mathbf{N}$ et $\boldsymbol{n}$. Cet angle, qui est situé dans le plan normal en M à C, n'étant intervenu jusqu'à présent que par son cosinus, nous n'avons pas eu besoin d'une définition plus précise. Avec les notations habituelles, nous conviendrons désormais de le compter positivement à partir de $\boldsymbol{n}$ vers $\boldsymbol{b}$, c'est-à-dire dans le sens direct autour de $\boldsymbol{t}$.

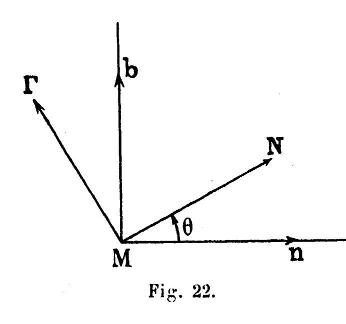


Fig. 22.

Considérons, dans le plan normal en M à C, un vecteur unitaire $\mathbf{\Gamma}$, perpendiculaire à $\mathbf{N}$, et tel que le trièdre $(\boldsymbol{t}, \mathbf{N}, \mathbf{\Gamma})$ soit direct. L'on a alors

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{n}\cos\theta + \boldsymbol{b}\sin\theta, \qquad \mathbf{\Gamma} = -\boldsymbol{n}\sin\theta + \boldsymbol{b}\cos\theta.$$

Le vecteur $\mathbf{\Gamma}$ est dirigé suivant l'intersection du plan normal en M à C et du plan tangent en M à S; on donne à cette intersection le nom de *normale géodésique* à la courbe C au point M.

Soit R le rayon de courbure de C en M; nous avons vu (théorème de Meusnier) que, pour toutes les courbes de S tangentes en M à C, le rapport $\frac{\cos\theta}{R}$ avait au point M la valeur unique $\frac{1}{\rho}$ (nº 209). On donne à l'expression $\frac{\sin\theta}{R}$ le nom de *courbure géodésique* de la courbe C au point M; l'inverse,

$\frac{R}{\sin\theta}$, est le *rayon de courbure géodésique*. Enfin, on démontre [1] que la courbure géodésique s'exprime uniquement au moyen des coefficients E, F, G et de leurs dérivées par rapport à $u$ et $v$.

Soit T le rayon de torsion de C en M. On donne au scalaire $\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}$ le nom de *torsion relative* [2]; Ossian Bonnet a fait connaître une expression remarquable de la torsion relative, qui montre que ce scalaire a la même valeur pour toutes les courbes de S tangentes en M à C.

On a d'abord, d'après les valeurs indiquées pour $\mathbf{N}$ et $\mathbf{\Gamma}$,

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\cos\theta + \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\sin\theta + \mathbf{\Gamma}\frac{d\theta}{ds},$$

ou, en tenant compte des formules de Frenet,

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\left(\frac{\boldsymbol{t}}{R} + \frac{\boldsymbol{b}}{T}\right)\cos\theta + \frac{\boldsymbol{n}}{T}\sin\theta + \mathbf{\Gamma}\frac{d\theta}{ds} = -\boldsymbol{t}\frac{\cos\theta}{R} - \mathbf{\Gamma}\left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}\right).$$

Multiplions scalairement par $\mathbf{\Gamma}$; il reste

$$\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = -\mathbf{\Gamma}\cdot\frac{d\mathbf{N}}{ds}.$$

Supposons maintenant que la surface soit rapportée à ses lignes de courbure, c'est-à-dire que les courbes coordonnées $u = C^{te}$ et $v = C^{te}$ soient précisément les lignes de courbure. Supposons de plus que $u$ et $v$ soient les arcs des deux lignes de courbure qui se coupent au point M.

Fig. 23.

Traçons, dans le plan tangent en M à S, les axes rectangulaires M$u$ et M$v$, qui coïncident avec les directions principales, le vecteur $\boldsymbol{t}$ relatif à C, et les vecteurs unitaires $\boldsymbol{t}_1$ et $\boldsymbol{t}_2$ relatifs aux lignes de courbure; enfin désignons par $\alpha$ l'angle $(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t})$ compté positivement de $\boldsymbol{t}_1$ vers $\boldsymbol{t}_2$, c'est-à-dire dans le sens direct autour de $\mathbf{N}$. On aura alors, avec les notations usuelles, en remarquant que sur la courbe C on peut considérer $u$ et $v$ comme des fonctions de l'arc $s$ de cette courbe,

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = \frac{\partial\mathbf{M}}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial\mathbf{M}}{\partial v}\frac{dv}{ds},$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_1\frac{du}{ds} + \boldsymbol{t}_2\frac{dv}{ds},$$

(1) Cf. par exemple Bouligand, *Leçons de Géométrie vectorielle*, n° 139.

(2) On dit aussi quelquefois, d'ailleurs improprement, *torsion géodésique*.

et par suite $$\frac{du}{ds} = \cos\alpha, \qquad \frac{dv}{ds} = \sin\alpha.$$

Ceci posé on a d'abord, au point M,

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}\frac{dv}{ds} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}\cos\alpha + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}\sin\alpha;$$

or les formules d'O. Rodrigues donnent ici

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} = -\frac{\boldsymbol{t}_1}{\rho_1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} = -\frac{\boldsymbol{t}_2}{\rho_2};$$

on en tire $$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\frac{\cos\alpha}{\rho_1}\boldsymbol{t}_1 - \frac{\sin\alpha}{\rho_2}\boldsymbol{t}_2.$$

D'autre part, d'après nos conventions, le trièdre ($\boldsymbol{t}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{\Gamma}$) est direct; on aura donc (*fig.* 23)

$$\mathbf{\Gamma} = \boldsymbol{t}_1 \sin\alpha - \boldsymbol{t}_2\cos\alpha.$$

Il vient alors finalement

$$\frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{d\theta}{ds} = -\mathbf{\Gamma}\cdot\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\cos\alpha\sin\alpha:$$

c'est la *formule d'*O. BONNET.

On voit en particulier que la torsion relative est nulle en tous les points d'une ligne de courbure, et que cette propriété pourrait être prise comme définition des lignes de courbure.

## § IX. — Congruences de droites.

**228.** Nous avons précédemment donné le nom général de *congruences* de courbes aux familles de courbes dépendant de deux paramètres. Nous allons étudier en particulier les congruences de droites.

Considérons le point M dont les coordonnées rectangulaires sont données par les formules

$$x = f(\lambda, \mu) + \rho f_1(\lambda, \mu), \qquad y = g(\lambda, \mu) + \rho g_1(\lambda, \mu), \qquad z = h(\lambda, \mu) + \rho h_1(\lambda, \mu).$$

Nous écrirons, avec la notation vectorielle,

$$\text{(24)} \qquad \mathbf{M} = \boldsymbol{u}(\lambda, \mu) + \rho\boldsymbol{v}(\lambda, \mu).$$

Quand, laissant $\lambda$ et $\mu$ constants, on fait varier $\rho$, ce point engendre une droite $\mathrm{D}(\lambda, \mu)$ qui dépend des deux paramètres $\lambda$ et $\mu$. L'équation (24) représente donc une congruence de droites.

En particulier, les normales à une surface forment une congruence.

Toute relation établie entre $\lambda$ et $\mu$ définit une surface réglée appartenant à la congruence, c'est-à-dire formée en associant les droites de la congruence.

Cherchons en particulier les relations qui définissent des développables de la congruence; on devra avoir (n° 191)

$$(du, v, dv) = 0,$$

ou

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial u}{\partial \mu} d\mu,\ v,\ \frac{\partial v}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial v}{\partial \mu} d\mu\right) = 0,$$

ou en développant, une équation de la forme

$$\text{(25)} \qquad P(\lambda, \mu) d\lambda^2 + 2Q(\lambda, \mu) d\lambda\, d\mu + R(\lambda, \mu) d\mu^2 = 0.$$

On en déduit deux valeurs pour le rapport $\frac{d\lambda}{d\mu}$, et, en intégrant, on arrive finalement aux deux relations

$$F_1(\lambda, \mu) = C^{te}, \qquad F_2(\lambda, \mu) = C^{te}.$$

L'une quelconque de ces relations définissant une développable, on voit qu'il existe deux familles de développables appartenant à la congruence, et que chaque droite de la congruence appartient à une développable de chaque famille. En particulier, les développables d'une congruence de normales forment les deux familles de normalies.

Soient $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ les surfaces lieux des arêtes de rebroussement des développables de chaque famille. D'après ce que nous venons de voir, toute droite de la congruence appartient à une développable de chaque famille; elle est donc tangente aux deux surfaces $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$, et par suite ces surfaces constituent les deux nappes de la surface focale (n° 206) de la congruence.

Soient D une droite de la congruence, $D_1$ et $D_2$ ses points de contact avec $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$, $\Pi_1$ et $\Pi_2$ les plans tangents à $\Sigma_1$ en $D_1$ et à $\Sigma_2$ en $D_2$, $\Delta_1$ et $\Delta_2$ les développables de la congruence qui passent par D, enfin $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ leurs arêtes de rebroussement situées respectivement sur $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$. Les points $D_1$ et $D_2$ sont appelés les *points focaux* de D, les plans $\Pi_1$ et $\Pi_2$ *plans focaux* associés à D. La développable $\Delta_1$, par exemple, étant formée de droites tangentes à $\Sigma_2$, est circonscrite à $\Sigma_2$; le plan $\Pi_2$ est donc identique au plan tangent à $\Delta_1$ le long de D, et par suite il est osculateur à $\Gamma_1$ en $D_1$. De même, l'autre plan focal $\Pi_1$ est osculateur à $\Gamma_2$ en $D_2$.

En particulier, pour une congruence de normales, la surface focale n'est autre que la développée, et les points focaux sont les centres de courbure principaux.

On voit aussi, en reprenant un raisonnement du n° 226, que si les plans focaux sont rectangulaires, toute arête de rebroussement d'une développable de la congruence est ligne géodésique de la nappe focale à laquelle elle appartient.

On peut déterminer les points focaux et par suite la surface focale sans avoir intégré l'équation (25). Il suffira pour cela, d'après ce qu'on

a vu au n° 206, de prendre pour $\rho$ une fonction de $\lambda$ et $\mu$ définie par l'équation

$$\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mu}\right) = 0,$$

qui s'écrit ici

$$(26) \qquad \left(\boldsymbol{v}, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \lambda} + \rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \mu} + \rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \mu}\right) = 0,$$

On obtient ainsi une équation du second degré en $\rho$, qui fait connaître les deux points focaux de la droite $D(\lambda, \mu)$. En portant successivement chacune des deux valeurs de $\rho$ racines de cette équation dans l'équation (24), on aura les deux nappes de la surface focale.

Il peut arriver qu'une des nappes focales se réduise à une courbe ou à un point, ce qui se produit même quelquefois pour les deux nappes; il s'introduit alors des simplifications dans la recherche des développables de la congruence.

Si, par exemple, la surface focale se compose d'une courbe C et d'une surface $\Sigma$, toutes les droites de la congruence seront assujetties à rencontrer la courbe C. Alors une des familles de développables sera formée des cônes ayant leur sommet sur C et circonscrits à $\Sigma$. Si la surface focale se compose de deux courbes, chaque famille de développables sera formée des cônes ayant leur sommet sur l'une des courbes et passant par l'autre; dans le cas où les deux courbes sont des droites, la congruence est dite *linéaire*.

Remarquons encore que l'équation (25), qui définit les développables de la congruence, définit aussi, sur la surface focale, les arêtes de rebroussement de ces développables.

Supposons que les équations de la congruence soient données sous la forme

$$x = a_1 + b_1 z, \qquad y = a_2 + b_2 z, \qquad z = z,$$

où $a_1$, $b_1$, $a_2$ et $b_2$ sont fonctions des paramètres $\lambda$ et $\mu$. L'équation aux surfaces développables s'écrira (n° 193)

$$da_1 db_2 - db_1 da_2 = 0,$$

équation du second degré en $\frac{d\lambda}{d\mu}$. Les $z$ des points focaux seront alors donnés (n° 194) par les équations compatibles

$$da_1 + z db_1 = 0, \qquad da_2 + z db_2 = 0,$$

où l'on remplacera successivement $\frac{d\lambda}{d\mu}$ par les deux racines de l'équation aux développables. On pourra encore obtenir directement l'équation aux points focaux en éliminant le rapport $\frac{d\lambda}{d\mu}$ entre les deux dernières équations, ce qui donne

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial \lambda} + z\frac{\partial b_1}{\partial \lambda}\right)\left(\frac{\partial a_2}{\partial \mu} + z\frac{\partial b_2}{\partial \mu}\right) - \left(\frac{\partial a_1}{\partial \mu} + z\frac{\partial b_1}{\partial \mu}\right)\left(\frac{\partial a_2}{\partial \lambda} + z\frac{\partial b_2}{\partial \lambda}\right) = 0.$$

**229.** Cherchons à quelle condition une congruence donnée est une congruence de normales. Il faut pour cela et il suffit que l'on puisse déterminer $\rho$ en fonction de $\lambda$ et $\mu$ de telle sorte que l'équation (24) définisse une surface normale aux droites de la congruence, ce qui s'écrit

$$\mathbf{v}.d\mathbf{M}=0,$$

ou, en développant,

$$\mathbf{v}.(d\mathbf{u}+\rho\, d\mathbf{v}+\mathbf{v}\, d\rho)=0.$$

On peut, sans nuire à la généralité, supposer que l'on a pris le vecteur $\mathbf{v}$ de longueur 1. La relation précédente s'écrit alors simplement

$$\mathbf{v}.d\mathbf{u}+d\rho=0.$$

On en tire, pour la détermination de $\rho$, les équations

$$\frac{\partial \rho}{\partial \lambda}=-\mathbf{v}.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial \mu}=-\mathbf{v}.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mu}$$

et la condition de compatibilité s'écrit

$$(27) \qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mu}.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda}-\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda}.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mu}=0.$$

C'est la condition cherchée. Si elle est satisfaite, l'équation

$$d\rho+\mathbf{v}.d\mathbf{u}=0$$

donne $\rho$ par une quadrature, qui introduit une constante arbitraire. L'équation

$$\mathbf{M}=\mathbf{u}+\rho\mathbf{v}$$

définit alors une famille de surfaces à un paramètre auxquelles toutes les droites de la congruence sont normales.

Soient $S_1$ et $S_2$ deux surfaces quelconques de la famille, $\rho_1$ et $\rho_2$ les valeurs correspondantes de $\rho$. La différence $\rho_1-\rho_2$ restant constante d'après ce que nous venons de voir, il résulte de la signification géométrique du vecteur $\mathbf{v}$ que la distance des deux surfaces, comptée sur une normale commune quelconque, reste constante : on dit alors que les surfaces sont *parallèles*. Ainsi les *trajectoires orthogonales d'une congruence de normales forment une famille de surfaces parallèles.*

Considérons par exemple une surface $\Sigma_1$ rapportée à un système de coordonnées curvilignes $(\lambda, \mu)$ tel que le $ds^2$ ait la forme géodésique (n° 224)

$$ds^2=d\lambda^2+G(\lambda, \mu)\,d\mu^2;$$

soit

$$\mathbf{M}_1=\mathbf{u}(\lambda, \mu)$$

l'équation de cette surface. On aura

$$(28) \qquad \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda}\right)^2=1, \qquad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda}.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mu}=0,$$

et en dérivant ces relations par rapport à $\lambda$ et $\mu$, on en tire aisément

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\lambda\,\partial\mu}\cdot\frac{\partial u}{\partial\lambda}=0,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\lambda^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\mu}=0. \tag{29}$$

Les courbes $\mu = C^{te}$ sont, comme on sait, des géodésiques de $\Sigma_1$[1], et leurs tangentes forment une congruence dont l'équation peut s'écrire

$$\mathbf{M}=u(\lambda,\,\mu)+\rho\frac{\partial u}{\partial\lambda};$$

l'équation (27), où l'on fait $v=\dfrac{\partial u}{\partial\lambda}$, est alors une conséquence immédiate des équations (29); par suite *les tangentes à une famille à un paramètre de lignes géodésiques d'une surface quelconque forment une congruence de normales.*

Il en résulte immédiatement que *les congruences dont les plans focaux associés à chaque génératrice sont rectangulaires forment une congruence de normales.*

En effet, si l'une des nappes focales d'une telle congruence est une surface, nous savons (n° 228) que les arêtes de rebroussement situées sur cette nappe sont des géodésiques.

La conclusion est la même si les deux nappes focales se réduisent à des courbes. Soient en effet

$$\mathbf{M}_1=u_1(\lambda),\qquad \mathbf{M}_2=u_2(\mu)$$

les équations de ces deux courbes; la congruence peut être représentée par une équation telle que

$$\mathbf{M}=u_1(\lambda)+\rho\, v(\lambda,\,\mu),$$

où l'on aura

$$v(\lambda,\,\mu)=a(\lambda,\,\mu)[u_2(\mu)-u_1(\lambda)],$$

avec

$$a^2(u_2-u_1)^2=1.$$

Les vecteurs $\dfrac{du_1}{d\lambda}\wedge v$ et $\dfrac{du_2}{d\mu}\wedge v$ sont normaux aux plans focaux en $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$.

La condition (27) s'écrit ici, puisque $\dfrac{\partial u_1}{\partial\mu}=0$,

$$\frac{du_1}{d\lambda}\cdot\frac{\partial v}{\partial\mu}=0,$$

[1] Remarquons en passant que le paramètre $\lambda$ mesure l'arc des courbes ($\mu$); or on tire des relations (28)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\lambda^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\lambda}=0,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\lambda^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\mu}=0,$$

et ces deux équations expriment que la normale principale à une courbe ($\mu$) est normale à $\Sigma_1$; elles établissent donc *directement* que sur toute surface $\Sigma_1$ pour laquelle on a

$$ds^2=d\lambda^2+G(\lambda,\,\mu)\,d\mu^2,$$

les courbes $\mu = C^{te}$ sont des géodésiques, résultat obtenu par une autre voie au n° 224

ou encore
$$\frac{du_1}{d\lambda}\cdot\left[\frac{\partial a}{\partial\mu}(u_2-u_1)+a\frac{du_2}{d\mu}\right]=0,$$

ou enfin

(27′)
$$\frac{du_1}{d\lambda}\cdot\frac{du_2}{d\mu}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial a}{\partial\mu}v.\frac{du_1}{d\lambda}=0.$$

D'ailleurs, on a

$$\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial\mu}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial a}{\partial\mu}v=\frac{du_2}{d\mu},$$

d'où, en multipliant scalairement par $v$,

$$-\frac{1}{a^2}\frac{\partial a}{\partial\mu}=v.\frac{du_2}{d\mu},$$

de sorte que la relation (27′) devient

$$\frac{du_1}{d\lambda}\cdot\frac{du_2}{d\mu}-\left(v.\frac{du_1}{d\lambda}\right)\left(v.\frac{du_2}{d\mu}\right)=$$

ou encore, d'après l'identité de Lagrange généralisée (n° 206),

$$\left(\frac{du_1}{d\lambda}\wedge v\right)\cdot\left(\frac{du_2}{d\mu}\wedge v\right)=0,$$

ce qui est précisément la condition d'orthogonalité des plans focaux.

En résumé, nous pouvons donc dire que *la condition nécessaire*[1] *et suffisante pour qu'une congruence donnée soit une congruence de normales est que les plans focaux associés à chaque génératrice soient rectangulaires.*

**230.** Remarques. — I. Nous avons vu que toute congruence de droites se compose de droites tangentes aux deux surfaces focales, ou tangentes à une surface et rencontrant une courbe, ou rencontrant deux courbes; nous écartons le cas singulier où l'une des nappes focales se réduit à un point.

Inversement, l'ensemble des droites tangentes à une surface donnée, ou rencontrant une courbe donnée, dépend de trois paramètres; donc l'ensemble des tangentes communes à deux surfaces, ou des droites tangentes à une surface et rencontrant une courbe, ou des droites rencontrant deux courbes, dépend de deux paramètres, et par suite forme une congruence. Il en résulte qu'une congruence de droites est entièrement déterminée par la connaissance de ses nappes focales.

II. — Les plans tangents à une surface (non développable) ou à une courbe (droite exclue) forment une famille à deux paramètres. Donc en général les plans tangents communs à deux surfaces, ou à une surface et une courbe, ou à deux courbes forment une famille à un paramètre et par suite envelop-

---

(1) Cf. n° 226.

pent une développable circonscrite aux surfaces ou passant par les courbes considérées.

Ceci posé, considérons une congruence dont aucune nappe focale ne se réduit à une développable ou à une droite; supposons, pour fixer les idées, que l'une des nappes focales soit une surface $\Sigma_1$ et l'autre une courbe $\Gamma_2$. Soient $\Delta$ la développable circonscrite à $\Sigma_1$ et passant par $\Gamma_2$, D une génératrice de $\Delta$, $D_1$ et $D_2$ ses points focaux situés l'un sur $\Sigma_1$, l'autre sur $\Gamma_2$. Une famille de développables de la congruence est formée des cônes circonscrits à $\Sigma_1$ et ayant leurs sommets sur $\Gamma_2$; le cône de sommet $D_2$ ayant en $D_1$ même plan tangent que $\Delta$, ces deux développables sont tangentes entre elles le long de D. L'autre famille de développables se compose de développables ayant leurs arêtes de rebrous sement sur $\Sigma_1$ et passant par $\Gamma_2$ : soit $\Delta'$ celle de ces développables qui passe par D; les développables $\Delta$ et $\Delta'$ ayant même plan tangent en $D_2$ se touchent tout le long de D.

Il résulte de ce qui précède qu'il existe en général, dans toute congruence de droites, une développable singulière qui est l'enveloppe commune des deux familles de développables, ou encore le lieu des génératrices de la congruence pour lesquelles les plans focaux sont confondus. Elle correspond à l'intégrale singulière de l'équation (25), et on l'obtiendra en égalant à zéro le discriminant de cette équation.

## § X. — Applications diverses.

**231**. *On considère une surface rapportée à des axes rectangulaires. Les coordonnées* $(x, y, z)$ *d'un point de cette surface sont données par les formules*

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = \pm\sqrt{(\rho - h\cos\theta)\left(\frac{l}{\cos\theta} - \rho\right)},$$

*$h$ et $l$ étant des constantes.*

*On demande :*

*1° de vérifier que les courbes $\theta = C^{te}$ sont des lignes de courbure. Nature de ces lignes, lieu des centres de courbure correspondants;*

*2° de former l'équation différentielle de l'autre série de lignes de courbure; vérifier que cette équation admet les solutions particulières*

$$\rho = h\cos\theta, \qquad \rho = \frac{l}{\cos\theta}.$$

*On profitera de ces remarques pour trouver l'intégrale générale de cette équation. Nature de ces lignes de courbure; lieu des centres de courbure correspondants.*

(*Paris, Géométrie supérieure, épr. écrite.*)

En revenant aux coordonnées cartésiennes, on a

$$z = \pm\sqrt{(x^2 + y^2 - hx)\left(\frac{l}{x} - 1\right)}. \tag{30}$$

D'autre part, $p$ et $q$ désignant comme d'habitude $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, l'équation aux lignes de courbure s'écrit (n° 219)

$$dp\,d(y+qz) - dq\,d(x+pz) = 0. \tag{31}$$

De l'équation (30) on tire successivement

$$x^2 + y^2 + z^2 - (l+h)x - l\frac{y^2}{x} + lh = 0, \tag{32}$$

$$x + pz = \frac{1}{2}\left(l + h - l\frac{y^2}{x^2}\right),$$

$$y + qz = l\frac{y}{x},$$

et l'équation (31) devient alors

$$d\frac{y}{x}\left(dp + \frac{y}{x}dq\right) = 0. \tag{33}$$

1° Une première famille de lignes de courbure est définie par l'équation

$$\frac{y}{x} = \lambda \qquad \text{ou} \qquad \theta = C^{te};$$

à chaque valeur de $\lambda$ correspond une ligne de courbure, intersection de la sphère

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - (h+l)x - \lambda l y + lh = 0$$

et du plan

$$P \equiv y - \lambda x = 0.$$

On obtient ainsi des circonférences situées dans des plans passant par l'axe $Oz$ et ayant leurs centres dans le plan des $xy$.

Considérons la congruence des normales à la surface; elle est définie par les équations

$$\begin{aligned} X &= x + pz - pZ, \\ Y &= y + qz - qZ, \end{aligned} \tag{34}$$

et les Z des points focaux sont donnés (n° 228) par l'équation

$$-Z\,dp + d(x+pz) = 0,$$

où l'on remplace successivement $\frac{dy}{dx}$ par ses valeurs tirées de l'équation (33). Mais puisque, pour la première famille de lignes de courbure, on a

$$d(x+pz) = -l\frac{y}{x}d\frac{y}{x} = 0,$$

on en déduit $Z = 0$ et par suite

$$X = \frac{1}{2}\left(l + h - l\frac{y^2}{x^2}\right), \qquad Y = l\frac{y}{x}.$$

La nappe correspondante de la surface focale, ou, ce qui revient au même, le lieu des centres de courbure principaux correspondant à la première famille de lignes de courbure, se réduit donc à la parabole

$$Z = 0, \qquad Y^2 + 2lX - l(l+h) = 0. \tag{35}$$

On peut arriver autrement à ce résultat. La surface, en effet, ayant une famille de lignes de courbure circulaires, est l'enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre. Soit

$$S + \mu P = 0$$

l'équation de cette famille, $\mu$ désignant une fonction inconnue de $\lambda$; nous déterminerons $\mu$ en écrivant que les caractéristiques sont les circonférences

$$S = 0, \qquad P = 0.$$

Or ces caractéristiques sont définies par les équations

$$S + \mu P = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial P}{\partial \lambda} + P \frac{d\mu}{d\lambda} = 0.$$

Cette dernière équation s'écrit

$$\left(\frac{d\mu}{d\lambda} - l\right) y - \left(\mu + \lambda \frac{d\mu}{d\lambda}\right) x = 0;$$

elle représente un plan qui doit coïncider avec le plan P, ce qui exige $\mu = -\lambda l$. Ainsi la surface est l'enveloppe des sphères

$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + x(l\lambda^2 - h - l) - 2\lambda l y + hl = 0,$$

et la nappe de la développée correspondant aux lignes de courbure considérées se réduit à la courbe lieu des centres des sphères $\Sigma$ : on retrouve bien la parabole (35).

2° L'équation (33) montre que la deuxième famille de lignes de courbure est définie par l'équation

$$x\,dp + y\,dq = 0,$$

et comme, pour toute courbe de la surface, on a

$$p\,dx + q\,dy - dz = 0,$$

on aura, sur toute ligne de courbure de cette famille,

$$px + qy - z = C^{te}.$$

Telle est, en termes finis, l'équation de la seconde famille. En remplaçant $p$ et $q$ par leurs valeurs, on peut l'écrire

$$(l + h)x + l\frac{y^2}{x} - 2lh - 2\alpha z = 0, \tag{36}$$

$\alpha$ désignant une constante arbitraire.

Compte tenu de l'équation (32), l'équation (36) devient

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha z - hl = 0, \tag{37}$$

et, en éliminant $y$ entre les équations (32) et (37), on a

$$z = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + hl}}{l}(l - x). \tag{38}$$

Les équations (37) et (38) représentent la seconde famille de lignes de courbure; ce sont des circonférences dont les plans passent par la droite

$$z = 0, \qquad x = l;$$

la surface considérée est donc une cyclide de Dupin.

Pour $\alpha = \infty$, on a $z = 0$, ce qui donne les deux lignes de courbure

$$\rho = h\cos\theta \qquad \text{et} \qquad \rho = \frac{l}{\cos\theta}.$$

Il est facile de voir *a priori* que ces deux courbes sont des lignes de courbure, puisque le long de ces lignes la surface et le plan des $xy$ se coupent à angle droit.

Enfin on verra sans peine que le lieu des centres de courbure principaux correspondant à la seconde famille de lignes de courbure se réduit à la parabole

$$2X = \frac{Z^2}{l} + h, \qquad Y = 0.$$

**232.** *On considère les surfaces développables dont les génératrices font un angle donné* $\alpha$ *avec l'axe des* $z$, *et qui passent par la parabole*

$$y^2 - 2px = 0, \qquad z = 0.$$

*Montrer que ces surfaces sont des cylindres, à l'exception d'une certaine surface développable* S, *composée de deux nappes distinctes se coupant suivant la parabole. Faire voir que* S *est l'enveloppe des cylindres, et rechercher géométriquement les projections sur le plan des* $(x, y)$ *des lignes de courbure de* S.

(*Bordeaux*, *épreuve écrite*, 2<sup>e</sup> *question*.)

Soient $\Gamma_1$ la parabole donnée, $\Gamma_2$ la conique intersection du plan de l'infini et du cône de révolution de sommet O, d'axe $Oz$, et de demi-angle au sommet $\alpha$. Les droites qui coupent $\Gamma_1$ et font avec $Oz$ l'angle $\alpha$ forment une congruence dont les nappes focales se réduisent à $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$.

Les développables de la congruence se composent :

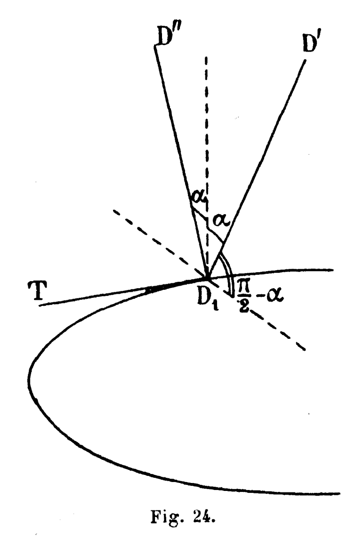



Fig. 24.

1° des cônes ayant leurs sommets sur $\Gamma_1$ et passant par $\Gamma_2$ : ce sont des cônes de révolution d'axe parallèle à $Oz$ et de demi-angle au sommet $\alpha$;

2° des cônes ayant leurs sommets sur $\Gamma_2$ et passant par $\Gamma_1$ : ce sont des cylindres passant par la parabole et dont les génératrices font un angle $\alpha$ avec $Oz$. On a ainsi les développables considérées dans l'énoncé.

Il existe en outre (n° 230, II) une développable singulière $\Delta$, passant par $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$, et enveloppe des cylindres.

Soient $D_1$ un point de $\Gamma_1$, $D_1T$ la tangente en ce point. Le plan normal à $\Gamma_1$ en $D_1$ coupe le cône de sommet $D_1$ passant par $\Gamma_2$ suivant deux génératrices D' et D'', et les plans (D', $D_1T$) et (D'', $D_1T$) sont tangents à ce cône. Il en résulte que, pour chacune des génératrices D' et D'', les plans focaux sont confondus; donc par tout point $D_1$ de $\Gamma_1$ passent deux génératrices rectilignes, D' et D'', de $\Delta$, et par suite $\Delta$ se compose bien de deux nappes distinctes se croisant suivant la parabole $\Gamma_1$.

Les génératrices rectilignes de $\Delta$ forment une première famille de lignes de courbure; les droites D' et D'', étant dans un plan perpendiculaire en $D_1$ à $D_1T$, se projettent sur le plan des $xy$ suivant les normales à la parabole.

D'ailleurs le plan tangent à $\Delta$ le long de D' coupe évidemment le plan $xOy$ sous l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$; donc tout plan parallèle à $xOy$ coupe $\Delta$ sous un angle constant et par suite suivant une ligne de courbure. La seconde famille de lignes de courbure, formée de courbes qui sont situées dans des plans parallèles au plan $xOy$, se projette

donc sur ce plan suivant les trajectoires orthogonales des normales de $\Gamma_1$, c'est-à-dire suivant les courbes parallèles à $\Gamma_1$.

REMARQUE. — Il est clair que les conclusions précédentes sont indépendantes de la forme de la courbe $\Gamma_1$ dans le plan $xOy$.

**233.** *On considère la surface réglée $\Sigma$ engendrée par les normales principales d'une courbe gauche $\Gamma$.*

1° *Exprimer, au moyen de l'arc $s$ de $\Gamma$ et de la longueur $l$ portée sur la normale principale à partir du point M de la courbe $\Gamma$, coordonnées d'un point quelconque P de $\Sigma$, le $dS^2$ de cette surface.*

*Former l'équation du plan tangent au même point, et vérifier que la normale à la surface $\Sigma$ au point P peut s'obtenir en composant un vecteur égal à $1-\frac{l}{R}$ parallèle à la binormale de $\Gamma$, et un vecteur $\frac{l}{T}$ parallèle à la tangente de $\Gamma$ au point M, R et T désignant suivant l'usage les rayons de courbure et de torsion de $\Gamma$.*

2° *Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de $\Sigma$; montrer que si l'on pose*

$$R\rho=1, \qquad T\tau=1, \qquad l\lambda=1,$$

*l'intégration de l'équation différentielle obtenue pour $\lambda$ considéré comme fonction de $s$ se ramène à la quadrature*

$$\int \frac{\tau\frac{d\rho}{ds}-\rho\frac{d\tau}{ds}}{2\tau^{\frac{3}{2}}}ds.$$

*La courbe $\Gamma$ est ligne asymptotique de la surface $\Sigma$.*

(*Rennes, épreuve écrite*, 2ᵉ *question.*)

1° On a, avec les notations habituelles,

$$\mathbf{P}=\mathbf{M}+l n,$$
$$d\mathbf{P}=d\mathbf{M}+l\,dn+n\,dl,$$
$$=\left[t\left(1-\frac{l}{R}\right)-b\frac{l}{T}\right]ds+n\,dl$$

et par suite

$$(d\mathbf{P})^2=dS^2=\left[\left(1-\frac{l}{R}\right)^2+\frac{l^2}{T^2}\right]ds^2+dl^2.$$

L'équation du plan tangent s'écrira immédiatement quand on connaîtra un vecteur $\mathbf{N}$ normal à la surface. Or on peut prendre

$$\mathbf{N}=\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial l}\wedge\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial s}=n\wedge\left(t+l\frac{dn}{ds}\right)$$
$$=n\wedge t+l n\wedge\frac{dn}{ds}$$
$$=b\left(\frac{l}{R}-1\right)-t\frac{l}{T}.$$

On en déduit la construction de la normale indiquée dans l'énoncé.

2° L'équation aux asymptotiques peut s'écrire (nᵒ 215, Rem.)

$$d\mathbf{N}.d\mathbf{P}=0;$$

or on a

$$d\mathbf{N}=\left[-lt\frac{d}{ds}\frac{1}{T}-\frac{n}{T}+lb\frac{d}{ds}\frac{1}{R}\right]ds+\left(\frac{b}{R}-\frac{t}{T}\right)dl,$$

et par suite, pour l'équation aux asymptotiques,

$$\left[l\left(1-\frac{l}{\mathrm{R}}\right)\frac{d}{ds}\frac{1}{\mathrm{T}}+\frac{l^2}{\mathrm{T}}\frac{d}{ds}\frac{1}{\mathrm{R}}\right]ds^2+\frac{2}{\mathrm{T}}ds\,dl=0.$$

Une première famille ($ds=0$) est formée des normales principales à $\Gamma$. Si l'on introduit les fonctions $\rho$, $\tau$, $\lambda$, on voit sans peine que les asymptotiques de la seconde famille sont données par l'équation différentielle

$$2\tau\frac{d\lambda}{ds}-\lambda\frac{d\tau}{ds}=\tau\frac{d\rho}{ds}-\rho\frac{d\tau}{ds}.$$

On en tire

$$\lambda=|\tau|^{\frac{1}{2}}\int\frac{\tau\frac{d\rho}{ds}-\rho\frac{d\tau}{ds}}{2|\tau|^{\frac{3}{2}}}ds.$$

Il est clair que $\Gamma$ appartient à cette seconde famille, puisque son plan osculateur est confondu avec le plan tangent à $\Sigma$ en chaque point de $\Gamma$. L'équation en $l$ admet bien en effet la solution $l=0$.

# CHAPITRE VI

## NOTIONS COMPLÉMENTAIRES ET THÉORIES ANNEXES

### § I. — Sur les surfaces isométriques.

**234.** Considérons deux surfaces S et $S_1$, rapportées la première à un système de coordonnées curvilignes ($\lambda$, $\mu$) et la seconde à un système de coordonnées curvilignes ($\alpha$, $\beta$).

Les équations

$$(1) \qquad \lambda = \varphi_1(\alpha, \beta), \qquad \mu = \varphi_2(\alpha, \beta)$$

font correspondre à tout point de la surface $S_1$ un point de la surface S, et il est clair que sous certaines conditions de continuité la correspondance pourra être biunivoque.

On aura alors, avec les notations usuelles, pour tout déplacement infiniment petit sur la première surface,

$$(2) \qquad ds^2 = \mathrm{E}d\lambda^2 + 2\mathrm{F}d\lambda\, d\mu + \mathrm{G}d\mu^2$$

et sur la seconde

$$(3) \qquad ds_1^2 = \mathrm{E}_1 d\alpha^2 + 2\mathrm{F}_1 d\alpha\, d\beta + \mathrm{G}_1 d\beta^2.$$

Si l'on peut déterminer les fonctions $\varphi_1$ et $\varphi_2$ de telle sorte qu'en faisant, dans le second membre de (2), le changement de variables défini par les équations (1), on ait identiquement

$$(4) \qquad ds^2 = ds_1^2,$$

on dit que les surfaces S et $S_1$ sont *isométriques*. Conformément à la terminologie adoptée par M. Bouligand dans ses *Leçons de Géométrie vectorielle*, nous emploierons cette dénomination de préférence à la dénomination *applicables*; nous dirons d'une façon précise que deux surfaces sont *applicables* quand elles appartiennent à une famille continue à un paramètre de surfaces isométriques. Notons d'ailleurs que la propriété physique suggérée par le mot *applicables* peut être soumise à d'importantes restrictions(1).

En identifiant les seconds membres des équations (2) et (3) après avoir fait e changement de variables (1) on obtient trois équations aux dérivées partielles

(1) B. Gambier, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, t. XLIV, 1920, p. 65-72 et 76-91.

auxquelles doivent satisfaire les fonctions $\varphi_1$ et $\varphi_2$ : on démontre qu'en général le problème n'a pas de solution.

A une courbe quelconque, $\beta = \theta(\alpha)$, de $S_1$, les équations (1) font correspondre une courbe de S, et l'équation (4) montre alors que, si S et $S_1$ sont isométriques, les arcs de ces deux courbes limités à des points correspondants ont même longueur.

On peut toujours paramétrer deux surfaces isométriques de telle sorte que les points correspondants aient mêmes coordonnées curvilignes : les $ds^2$ des surfaces sont alors identiques. Réciproquement, si deux surfaces ont des $ds^2$ identiques, elles sont isométriques et les points correspondants ont mêmes coordonnées curvilignes.

**235.** Pour donner un exemple important de surfaces isométriques, nous allons montrer que toute surface développable est isométrique à un plan.

Soit
$$\mathbf{M} = \boldsymbol{u}(\lambda) + \rho \boldsymbol{v}(\lambda)$$
l'équation d'une surface développable; on peut toujours supposer que le vecteur $\boldsymbol{v}$ est de longueur 1 et que la courbe $\rho = 0$ est une trajectoire orthogonale des génératrices; on aura alors
$$(\boldsymbol{v})^2 = 1, \qquad \boldsymbol{v}.d\boldsymbol{v} = 0, \qquad \boldsymbol{v}.d\boldsymbol{u} = 0.$$

La surface étant développable, on a d'ailleurs
$$(\boldsymbol{v},\ d\boldsymbol{u},\ d\boldsymbol{v}) = 0,$$
ou
$$\alpha_1 d\boldsymbol{u} + \alpha_2 d\boldsymbol{v} + \alpha_3 \boldsymbol{v} = 0,$$
$\alpha_1$, $\alpha_2$ et $\alpha_3$ désignant des scalaires convenablement choisis non tous nuls; multiplions scalairement cette dernière équation par $\boldsymbol{v}$, il reste $\alpha_3 = 0$, d'où
$$\alpha_1 d\boldsymbol{u} + \alpha_2 d\boldsymbol{v} = 0.$$

On aura donc successivement, en supposant $\alpha_1 \neq 0$ (ce qui écarte l'hypothèse du cylindre, pour lequel la propriété à démontrer est évidente),
$$ds^2 = (d\boldsymbol{u} + \rho d\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} d\rho)^2 = \left[\left(\rho - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) d\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} d\rho\right]^2$$
$$= d\rho^2 + \left(\rho - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\lambda}\right)^2 d\lambda^2,$$
ou, en posant
$$d\mu = \sqrt{\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\lambda}\right)^2} d\lambda, \qquad -\frac{\alpha_2(\lambda)}{\alpha_1(\lambda)} = \alpha(\mu),$$
$$ds^2 = d\rho^2 + (\rho + \alpha)^2 d\mu^2.$$

Telle est la forme réduite du $ds^2$ d'une surface développable.

Le $ds^2$ du plan en coordonnées cartésiennes rectangulaires s'écrit
$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Si l'on pose

$$dx + idy = e^{i\mu}[d\rho + i(\rho + \alpha)d\mu],$$
$$dx - idy = e^{-i\mu}[d\rho - i(\rho + \alpha)d\mu],$$

d'où

$$x = \rho\cos\mu - \int \alpha \sin\mu\, d\mu,$$

$$y = \rho\sin\mu + \int \alpha\cos\mu\, d\mu,$$

on réalise l'identification des $ds^2$ : la surface développable est donc bien isométrique à un plan.

On voit qu'aux génératrices rectilignes de la développable ($\lambda = C^{te}$, c'est-à-dire $\mu = C^{te}$) correspond une famille de droites du plan, et à l'arête de rebroussement l'enveloppe de cette famille de droites. Ce dernier point résulte de ce que, deux surfaces isométriques pouvant être paramétrées de façon à avoir des $ds^2$ identiques, deux courbes quelconques de l'une se coupent sous le même angle que les deux courbes correspondantes de l'autre.

Montrons réciproquement que toute surface isométrique à un plan est développable.

Par hypothèse on peut paramétrer la surface de telle sorte que l'on ait

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\alpha, \beta)$$

avec

$$ds^2 = (d\mathbf{M})^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha}\right)^2 = 1, \qquad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \beta} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \beta}\right)^2 = 1 \text{ [1]}.$$

On tire aisément de ces relations

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \alpha^2} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \alpha\partial\beta} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \beta^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \alpha^2} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \alpha\partial\beta} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \beta^2} = 0;$$

donc les vecteurs $\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \alpha^2}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \alpha\partial\beta}$ et $\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \beta^2}$ sont dirigés suivant la normale à la surface, en sorte que l'on peut poser, avec les notations usuelles,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \alpha^2} = a_1\mathbf{N}, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \alpha\partial\beta} = a_2\mathbf{N}, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \beta^2} = a_3\mathbf{N},$$

d'où, en multipliant scalairement par **N**,

$$E' = a_1, \qquad F' = a_2, \qquad G' = a_3,$$

---

(1) Il suffit de se reporter au n° 228 pour constater immédiatement que l'on a alors $F'^2 - E'G' = 0$, et par suite que la surface est développable. Mais le raisonnement que nous donnons ici est indépendant du calcul de la courbure totale.

et par suite $\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \alpha^2} = \mathrm{E'}\mathbf{N}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \alpha \partial \beta} = \mathrm{F'}\mathbf{N}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \beta^2} = \mathrm{G'}\mathbf{N}.$

On a d'ailleurs $\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial^3 \mathbf{M}}{\partial \alpha \partial \beta^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \beta^2} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial^3 \mathbf{M}}{\partial \alpha \partial \beta^2} = 0,$

et par suite $\mathrm{F'^2} - \mathrm{E'G'} = 0.$

Donc tous les points de la surface sont paraboliques (n° 210), et la surface est bien développable (n° 213).

REMARQUE. — Soient S et $S_1$ deux surfaces isométriques; imaginons que la surface S soit recouverte d'un réseau de fils inextensibles, d'épaisseur négligeable, coïncidant par exemple avec des courbes coordonnées très voisines les unes des autres; le tissu ainsi obtenu donnera une représentation matérielle de la surface S. Il peut alors arriver que la portion de tissu qui recouvre une aire finie A de S, convenablement *déformée*, s'applique exactement sur une aire $A_1$ de $S_1$ : on dit dans ce cas que l'on passe de A à $A_1$ par une *déformation*, et c'est alors, d'après notre terminologie, que A est *applicable* sur $A_1$.

Ces considérations exigeraient des précisions assez délicates dans lesquelles nous ne pouvons songer à entrer. Faisons seulement observer qu'on n'étudie, dans la géométrie des surfaces, que les déformations *continues*, c'est-à-dire satisfaisant à certaines conditions de régularité : par exemple, si l'on prend une portion de surface à courbure totale positive, on ne considérera que les déformations pour lesquelles la face convexe restera convexe. Il est alors facile de voir que l'isométrie n'entraine pas nécessairement l'applicabilité : il suffira par exemple de raisonner sur deux triangles sphériques scalènes symétriques.

Signalons encore que la déformation ainsi définie n'est pas toujours possible : par exemple on démontre qu'une sphère, ou plus généralement une surface fermée partout convexe, n'est pas déformable; elle le devient si on en supprime une portion arbitrairement petite.

Les éléments qui restent invariants dans la déformation d'une surface S sont appelés des éléments géodésiques de S; ils doivent pouvoir être définis uniquement au moyen de E, F, G et de leurs dérivées. Exemple : courbure totale (n° 223), courbure géodésique (n° 227).

## § II. — Sur la représentation conforme.

**236.** Soient S et $S_1$ deux surfaces isométriques, P et $P_1$ deux points correspondants, C et C′ deux courbes de S qui se coupent en P, $C_1$ et $C'_1$ les courbes correspondantes de $S_1$. Traçons sur S une courbe Γ qui coupe C et C′ en deux points Q et R infiniment voisins de P : soient $\Gamma_1$, $Q_1$, $R_1$ les éléments géométriques correspondants sur $S_1$.

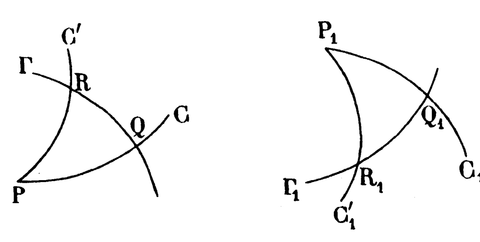


Fig. 25.

Les triangles infiniment petits PQR et $P_1Q_1R_1$ peuvent être assimilés à des triangles rectilignes qui

auront leurs trois côtés égaux, puisque les surfaces sont supposées isométriques; donc, comme nous l'avons déjà signalé, l'angle sous lequel se coupent en P les courbes C et C′ est égal à l'angle sous lequel se coupent en $P_1$ les courbes correspondantes $C_1$ et $C'_1$.

Prenons maintenant deux surfaces quelconques S et $S_1$,

$$(S) \qquad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\lambda, \mu), \qquad\qquad (S_1) \qquad \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1(\alpha, \beta)$$

et soient
$$\lambda = \varphi_1(\alpha, \beta), \qquad \mu = \varphi_2(\alpha, \beta)$$

les équations qui définissent une représentation de $S_1$ sur S. Si cette représentation est telle que l'angle sous lequel se coupent deux courbes quelconques de S est égal à l'angle sous lequel se coupent les courbes correspondantes de $S_1$, on dit qu'on a réalisé une *représentation conforme* de $S_1$ sur S.

Pour qu'il en soit ainsi, il n'est plus nécessaire que les triangles PQR et $P_1Q_1R_1$ soient égaux; il suffit qu'ils soient semblables, c'est-à-dire que le rapport $\frac{PR}{P_1R_1}$ soit le même quelle que soit la courbe qui passe en P. Autrement dit, en deux points correspondants, le rapport $\frac{ds}{ds_1}$ est invariable; on doit donc avoir une relation de la forme

$$ds^2 = \theta(\alpha, \beta)\, ds_1^2. \tag{5}$$

Or on a

$$ds^2 = E(\lambda, \mu)\, d\lambda^2 + 2F(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu + G(\lambda, \mu)\, d\mu^2,$$
$$ds_1^2 = E_1(\alpha, \beta)\, d\alpha^2 + 2F_1(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta + G_1(\alpha, \beta)\, d\beta^2;$$

l'équation (5) s'écrit donc

$$\begin{aligned}(6)\qquad \frac{E\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\right)^2 + 2F\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\frac{\partial\mu}{\partial\alpha} + G\left(\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\right)^2}{E_1} &= \frac{E\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\frac{\partial\lambda}{\partial\beta} + F\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\frac{\partial\mu}{\partial\beta} + \frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\right) + G\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}}{F_1} \\ &= \frac{E\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\right)^2 + 2F\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\frac{\partial\mu}{\partial\beta} + G\left(\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^2}{G_1}.\end{aligned}$$

On a ainsi en définitive deux équations pour déterminer les deux fonctions inconnues λ et μ, et par suite le problème aura en général une solution.

Alors que deux surfaces arbitraires ne sont pas en général isométriques, on voit qu'elles admettent toujours une représentation conforme de l'une sur l'autre. En particulier, si la surface S est un plan, on dit que la représentation conforme de $S_1$ sur S donne la *carte géographique* de $S_1$.

**237. Premier exemple : représentation conforme d'une sphère sur un plan.** — Soient, en coordonnées polaires,

$$x_1 = \sin\theta\cos\varphi, \qquad y_1 = \sin\theta\sin\varphi, \qquad z_1 = \cos\theta$$

les équations paramétriques d'une sphère de rayon 1. On aura

$$ds_1^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2.$$

D'autre part le $ds^2$ du plan en coordonnées cartésiennes rectangulaires s'écrit

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Nous devrons avoir

$$dx^2 + dy^2 = \mathrm{H}(\theta, \varphi)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

Or le premier membre est un produit de différentielles exactes

$$(dx + i dy)(dx - i dy);$$

pour mettre le second sous la même forme, il suffira de trouver un facteur intégrant pour chacune des différentielles

$$d\theta + i \sin\theta\, d\varphi, \qquad d\theta - i \sin\theta\, d\varphi;$$

il est clair, par exemple, que chacune admet le facteur intégrant $\frac{1}{\sin\theta}$. On obtiendra donc une représentation conforme en prenant

$$\mathrm{H}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sin^2\theta}, \qquad dx \pm i dy = \frac{d\theta}{\sin\theta} \pm i d\varphi,$$

c'est-à-dire

$$x = \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \qquad y = \varphi.$$

Alors aux méridiens $\varphi = \mathrm{C}^{te}$ correspondront des parallèles à l'axe des $x$, et aux parallèles $\theta = \mathrm{C}^{te}$ des parallèles à l'axe des $y$. C'est le système de carte de MERCATOR.

Cette méthode peut évidemment servir à faire la carte géographique d'une surface quelconque : il suffit de décomposer le $ds^2$ de cette surface en produit de différentielles linéaires, et de chercher pour chacune de ces différentielles un facteur intégrant.

**Deuxième exemple : représentation conforme d'un plan sur un plan.** — Le problème de la représentation conforme d'un plan sur un plan est lié, comme nous allons le voir, à la théorie des fonctions analytiques. Une telle représentation est désignée parfois sous le nom de *transformation isogonale* du plan *en lui-même*; il est inutile en effet de considérer deux plans distincts, et l'on peut poser la question de la façon suivante : trouver deux fonctions $\mathrm{X}(x, y)$ et $\mathrm{Y}(x, y)$ telles que la transformation plane définie par les équations

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}(x, y), \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{Y}(x, y)$$

conserve les angles.

Les équations (6) s'écriront ici

$$\frac{\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x}\right)^2}{1} = \frac{\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}}{0} = \frac{\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}\right)^2}{1},$$

ou encore

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2,\\ &\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y}=-\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}. \end{aligned}$$

Posons

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\lambda\frac{\partial Y}{\partial y};$$

la seconde équation (7) donnera

$$\lambda\frac{\partial X}{\partial y}=-\frac{\partial Y}{\partial x},$$

et la première

$$\lambda^2=1,\qquad \text{d'où}\qquad \lambda=\pm 1.$$

A deux signes différents de $\lambda$ correspondront, par exemple, deux valeurs opposées de X, c'est-à-dire deux transformations identiques à une symétrie près. On peut donc se borner à prendre $\lambda=+1$, et on tire alors des équations (7)

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial y},\qquad \frac{\partial X}{\partial y}=-\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

On reconnaît les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction

$$Z=F(z)=X(x,y)+iY(x,y)$$

soit une fonction analytique. On peut donc dire qu'à toute fonction analytique correspond une transformation isogonale du plan en lui-même; à chaque courbe décrite par le point d'affixe $z$ correspond une courbe décrite par le point Z, et deux courbes quelconques du plan $(z)$ se coupent sous le même angle que leurs transformées dans le plan (Z).

Considérons par exemple l'équation

$$Z=\frac{az+\lambda}{bz+\mu},$$

qui établit entre les variables Z et $z$ une correspondance homographique; la représentation conforme qui lui correspond transforme les circonférences en circonférences. En effet, si Z par exemple décrit une circonférence de centre $\alpha$, on aura

$$Z-\alpha=\frac{a-b\alpha}{b}\,\frac{z+\dfrac{\lambda-\mu\alpha}{a-b\alpha}}{z+\dfrac{\mu}{b}};$$

soient M, A et B les points d'affixes respectives

$$z,\qquad -\frac{\lambda-\mu\alpha}{a-b\alpha},\qquad -\frac{\mu}{b}.$$

Puisque $|Z - \alpha|$ est constant par hypothèse, il en sera de même du rapport

$$\frac{\left|z + \frac{\lambda - \mu\alpha}{a - b\alpha}\right|}{\left|z + \frac{\mu}{b}\right|} = \frac{MA}{MB},$$

et le lieu de M est bien une circonférence.

Remarque. — Étant donnés deux domaines D et $D_1$ du plan $xy$, on peut se proposer de déterminer une représentation conforme qui établisse une correspondance *biunivoque* entre les points des deux domaines. C'est un problème qui a été résolu par Riemann, dans l'hypothèse où D et $D_1$ sont simplement connexes.

Considérons par exemple le cas où le domaine D est le cercle de centre O et de rayon 1, et le domaine $D_1$ un demi-plan limité à une droite indéfinie $\Delta$.

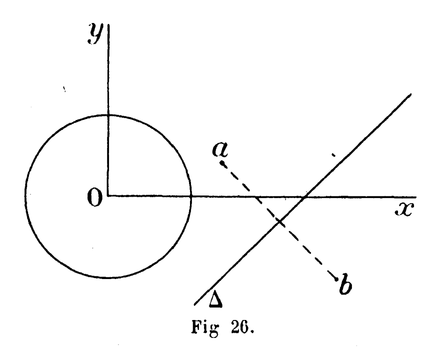


Fig 26.

Soient $a$ et $b$ deux points quelconques symétriques par rapport à $\Delta$, le point $a$ appartenant au domaine $D_1$. Posons

$$(8) \qquad z = \frac{z_1 - a}{z_1 - b} e^{i\varphi},$$

$\varphi$ désignant un argument réel quelconque.

Quand $z_1$ décrit $\Delta$, on a évidemment $|z| = 1$, donc $z$ décrit la circonférence de centre O et de rayon 1; d'ailleurs $z$ vient en O quand $z_1$ vient en $a$, donc aux points $z_1$ situés du même côté de $\Delta$ que $a$ correspondent les points $z$ intérieurs à la circonférence. La relation (8) définit donc une représentation conforme du demi-plan sur le cercle, et la correspondance établie entre D et $D_1$ est évidemment biunivoque[1].

**238.** Application. — *Deux variables complexes* $z = x + iy$, $Z = X + iY$ *sont liées par la relation*

$$(1) \qquad Z = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2.$$

*On fait décrire à la variable* $z$ *le quart de cercle* OAB *de rayon* 1, *défini par les inégalités*

$$x \geqslant 0, \qquad y \geqslant 0, \qquad x^2 + y^2 \leqslant 1;$$

*trouver le domaine* D *décrit par la variable* Z, *et montrer que la relation* (1) *établit une correspondance univoque entre les points de ces deux domaines.*

---

[1] On peut choisir $a$ et $\varphi$ arbitrairement, d'où indétermination d'ordre 3. Cela tient en définitive à ce que les transformations conformes d'un demi-plan sur lui-même dépendent de *trois* paramètres : par exemple pour le demi-plan $y \geqslant 0$, on a les transformations $Z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont quatre constantes *réelles* telles que $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$.

*Déduire du résultat une fonction analytique $f(z)$ permettant d'effectuer la représentation conforme du quart de cercle* OAB *sur un cercle de rayon* 1.

(*Paris, épreuve écrite,* 2e *question.*)

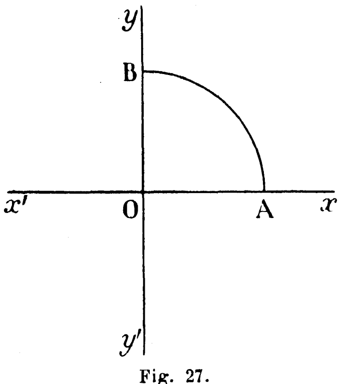



Fig. 27.

Posons

$$z = \rho e^{i\theta}, \qquad z_1 = z + \frac{1}{z} = x_1 + iy_1,$$

d'où

$$x_1 = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\theta, \qquad y_1 = \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\theta.$$

Quand $z$ décrit OA, on a $\theta = 0$ et $\rho$ varie de zéro à 1 ; alors $z_1$ décrit l'axe réel de $+\infty$ à $+2$. Quand $z$ décrit l'arc AB, on a $\rho = 1$ et $\theta$ varie de zéro à $\frac{\pi}{2}$ ; alors $z_1$ décrit l'axe réel de $+2$ à zéro. Enfin quand $z$ décrit BO, on a $\theta = \frac{\pi}{2}$, et $\rho$ varie de 1 à zéro; alors $z_1$ décrit l'axe imaginaire de 0 à $-\infty$. Donc au contour OAB correspond pour la variable $z_1$ l'ensemble des demi-axes $Ox$ et $Oy'$, et il est clair que la correspondance entre les deux contours est univoque. Nous désignerons par $d_1$ la portion du plan limitée par $Ox$ et $Oy'$.

Pour tout point *intérieur* au contour OAB, on a

$$\rho < 1, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

et par suite

$$x_1 > 0, \qquad y_1 < 0;$$

donc à tout point $z$ intérieur à OAB correspond un point $z_1$ et un seul intérieur au domaine $d_1$. Réciproquement, à tout point $z_1$ intérieur à $d_1$, l'équation

$$z^2 - zz_1 + 1 = 0$$

fait correspondre deux points $z'$ et $z''$ tels que $|z'|\,|z''| = 1$; donc l'un de ces points et un seul, soit $z'$, a un module $\rho'$ inférieur à 1. On a d'ailleurs, puisque $z_1$ appartient à $d_1$,

$$\left(\rho' + \frac{1}{\rho'}\right)\cos\theta' > 0, \qquad \left(\rho' - \frac{1}{\rho'}\right)\sin\theta' < 0,$$

ce qui montre que $z'$ a un argument $\theta'$ compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$; donc au point $z_1$ de $d_1$ correspond un point et un seul du quart de cercle. La correspondance entre les deux domaines est donc biunivoque.

Si l'on pose maintenant $Z = z_1^2$, on voit que le domaine D de la variable Z correspondant au domaine $d_1$ se compose du demi-plan situé au-dessous de l'axe réel. A tout point $z_1$ de $d_1$ correspond un seul point Z de D, et inversement à tout point Z de D correspondent deux points $z_1'$ et $z_1''$, symétriques par rapport à l'origine, et dont un seul est situé dans l'angle $xOy'$. Donc la correspondance entre D et le quart de cercle est biunivoque.

On sait d'ailleurs (n° 237, Rem.) que la relation

$$Z_1 = \frac{Z + i}{Z - i}$$

établit une correspondance biunivoque entre le demi-plan D et le cercle de centre O et de rayon 1. Donc en définitive la fonction

$$Z_1 = f(z) = \frac{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + i}{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - i}$$

permet la représentation conforme du quart de cercle OAB sur le cercle de centre O et de rayon 1, avec correspondance biunivoque entre les deux domaines.

## § III. — Sur les transformations de contact.

**239.** Considérons les équations

(9) $$X = X(x, y), \qquad Y = Y(x, y),$$

où nous supposons que le jacobien $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$ n'est pas nul identiquement. Ces équations établissent une correspondance entre les points des deux plans $(x, y)$ et (X, Y), et cette correspondance est, au moins dans certains domaines, biunivoque; par suite, à toute courbe du plan $(x, y)$, les équations (9) font correspondre une courbe du plan (X, Y) qui sera dite transformée de la première par les équations (9) : une telle transformation est appelée *ponctuelle.*

Soient $c$ une courbe du plan $(x, y)$, $m$ un point de $c$, C et M les courbe et point correspondants du plan (X, Y), enfin $y'$ et $Y'$ les valeurs des dérivées $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dY}{dX}$ en $m$ et M sur les courbes $c$ et C. Les règles connues du changement de variables permettent de déterminer $Y'$ au moyen de $x$, $y$ et $y'$, indépendamment de la courbe $c$ choisie : on aura

(10) $$Y' = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x}dx + \frac{\partial Y}{\partial y}dy}{\frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x} + y'\frac{\partial Y}{\partial y}}{\frac{\partial X}{\partial x} + y'\frac{\partial X}{\partial y}}.$$

Il en résulte que la transformation (9) change deux courbes $c$ et $c_1$, tangentes au point $m(x, y)$, en deux courbes C et $C_1$ tangentes au point M correspondant à $m$.

On pourra de même exprimer $Y^{(n)}$ au moyen de $x$, $y$, $y' \ldots y^{(n)}$; il en résulte comme précédemment que deux courbes qui ont un contact d'ordre $n$ au point $m(x, y)$ sont transformées par les équations (9) en deux courbes ayant, au point correspondant à $m$, un contact du même ordre. On exprime ce fait en disant que les transformations ponctuelles *conservent les contacts.*

**240.** On donne le nom d'*élément de contact* à l'ensemble d'un point et d'une droite passant par ce point. Un élément de contact peut donc être défini par trois coordonnées $(x, y, y')$, les deux premières représentant les coor-

données du point, et la troisième le coefficient angulaire de la droite. On dit qu'un élément de contact appartient à une courbe si la courbe passe au point $(x, y)$ et a en ce point une tangente de coefficient angulaire $y'$.

Supposons que $x$, $y$ et $y'$ soient fonctions d'un paramètre $t$. Aux différentes valeurs de $t$ correspondront $\infty^1$ éléments; si l'on a identiquement

$$dy - y'dx = 0,$$

on dit que ces éléments forment une *multiplicité*. L'ensemble des points appartenant à la multiplicité en est le *support ponctuel*.

Il existe deux types de multiplicités. Ou bien $x$ et $y$ dépendent effectivement de $t$; le support ponctuel est alors une courbe $c$, et la multiplicité se compose de l'ensemble des éléments appartenant à $c$. Ou bien $x$ et $y$ sont constants; le support ponctuel se réduit à un point, on a $dx = 0$, $dy = 0$, et $y'$ est quelconque; la multiplicité se compose d'un point fixe associé aux $\infty^1$ droites qui passent par ce point.

Les équations

$$(11) \qquad X = X(x, y, y'), \qquad Y = Y(x, y, y'), \qquad Y' = P(x, y, y')$$

définissent une correspondance entre les éléments de contact des plans $(x, y)$ et $(X, Y)$; nous supposerons que le jacobien $\frac{D(X, Y, P)}{D(x, y, y')}$ n'est pas identiquement nul, de telle sorte que l'on puisse résoudre les équations (11) par rapport à $x$, $y$ et $y'$. On dit que ces équations définissent une *transformation de contact* si l'on a identiquement une relation de la forme

$$(12) \qquad dY - Y'dX = \rho(x, y, y')(dy - y'dx).$$

A toute multiplicité de l'un des plans, les équations (11) font alors correspondre une multiplicité de l'autre plan; on peut donc dire que toute transformation de contact détermine une correspondance entre les multiplicités des deux plans. Réciproquement si les équations (11) définissent une correspondance entre les multiplicités des deux plans, la relation

$$dy - y'dx = 0$$

doit entraîner

$$dY - Y'dX = 0;$$

le premier membre de cette dernière équation étant linéaire en $dx$, $dy$, $dy'$, ceci exige que l'on ait une relation de la forme (12), donc que les équations (11) représentent une transformation de contact.

Soit $c$ une courbe du plan $(x, y)$; la transformation de contact (11) changera la multiplicité qui a pour support ponctuel la courbe $c$ en une autre multiplicité dont le support ponctuel C sera un point ou une courbe : on dit que la transformation de contact change $c$ en C.

Une transformation de contact change évidemment deux multiplicités qui ont un élément de contact commun en deux autres multiplicités ayant aussi un élément de contact commun, donc deux courbes tangentes en deux courbes

tangentes, ou en une courbe et un point situé sur cette courbe. On peut d'ailleurs déduire des équations (11) la valeur de $Y^{(n)}$ en fonction de $x, y, y', \ldots y^{(n)}$; on en conclut, comme pour les transformations ponctuelles, que les contacts sont conservés par toute transformation de contact.

Il est clair, d'après leur signification géométrique, que les équations (9) et (10) déterminent une correspondance de multiplicités, donc une transformation de contact; on le vérifie analytiquement en montrant que ces équations entraînent la relation

$$dY - Y'dX = \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial x} + y'\frac{\partial X}{\partial y}} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)}(dy - y'dx),$$

qui est bien de la forme (12). Ainsi toute transformation ponctuelle est une transformation de contact.

**241.** Considérons maintenant la multiplicité du plan $(x, y)$ dont le support ponctuel se réduit au point $(a, b)$, et supposons que les équations (11) définissent une transformation de contact. Si les fonctions $X(x, y, y')$ et $Y(x, y, y')$ sont indépendantes de $y'$, la multiplicité correspondante du plan (X, Y) aura aussi pour support ponctuel un point : c'est le cas des transformations ponctuelles. Mais si ces fonctions dépendent de $y'$, la multiplicité correspondante aura pour support ponctuel une courbe, dont on obtiendra l'équation en éliminant le paramètre arbitraire $y'$ entre les équations

$$X = X(a, b, y'), \qquad Y = Y(a, b, y').$$

Plaçons-nous dans cette seconde hypothèse. A tout élément de contact d'une multiplicité du plan $(x, y)$, les équations (11) font correspondre un élément de contact d'une multiplicité du plan (X, Y), quelle que soit la nature des supports ponctuels en correspondance. Éliminons $y'$ entre les deux premières équations (11), et soit

$$(13) \qquad F(x, y, X, Y) = 0$$

l'équation ainsi obtenue.

A tout point $m(x, y)$ cette équation fait correspondre une courbe $\Gamma$ du plan (X, Y); quand $m$ décrit une courbe $c$, la courbe $\Gamma$ enveloppe une courbe C : je dis que cette courbe C est précisément la transformée de $c$ par la transformation de contact. En effet, à tout élément de contact $(x, y, y')$ de la multiplicité qui a pour support ponctuel le point $m$, les équations (11) font correspondre un élément de contact (X, Y, Y') de la courbe $\Gamma$ correspondant à $m$; en particulier à l'élément de contact formé du point $m$ et de la tangente à $c$ en $m$ correspond un élément de contact qui appartient à la fois à $\Gamma$ et à la transformée de $c$ par la transformation de contact : donc cette transformée enveloppe les courbes $\Gamma$, et par suite elle est identique à C.

A tout point M(X, Y), l'équation (13) fait de même correspondre une

courbe $\gamma$ du plan $(x, y)$, et quand M décrit une courbe C, $\gamma$ enveloppe une courbe $c$ qui est, on le montrerait comme précédemment, la courbe associée à C par la transformation de contact. Une transformation de contact autre qu'une transformation ponctuelle est donc entièrement définie par une équation telle que (13); aussi donne-t-on à cette équation le nom d'*équation fondamentale* de la transformation de contact.

Soit
$$y = f(x)$$
l'équation d'une courbe $c$ du plan $(x, y)$. Pour avoir sa transformée, il faut, d'après la théorie des enveloppes, éliminer $x$, $y$ et $y'$ entre les quatre équations

$$(14) \quad F(x, y, X, Y) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad y = f(x), \qquad y' = f'(x).$$

Les deux premières, qui sont indépendantes de la courbe $c$, donnent X et Y en fonction de $x$, $y$ et $y'$. Pour avoir Y′, différentions la première équation, on aura

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial X}dX + \frac{\partial F}{\partial Y}dY = 0,$$

ou, en tenant compte de la seconde équation et des relations

$$dy = y'dx, \qquad dY = Y'dX,$$
$$\frac{\partial F}{\partial X} + Y'\frac{\partial F}{\partial Y} = 0.$$

En résumé, les équations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial X} + Y'\frac{\partial F}{\partial Y} = 0,$$

résolues par rapport à X, Y et Y′, donneront les équations de la transformation de contact qui a pour équation fondamentale l'équation (13).

Prenons par exemple comme équation fondamentale

$$Y + y - xX = 0;$$

on en déduit aisément, pour la transformation de contact correspondante, les équations

$$X = y', \qquad Y = xy' - y, \qquad Y' = x.$$

On donne à cette transformation le nom de *transformation de* Legendre.

On voit maintenant la différence qui existe entre les transformations de contact ponctuelles et non ponctuelles. Les premières établissent entre les plans $(x, y)$ et (X, Y) une correspondance point par point et courbe par courbe : elles transforment les multiplicités sans jamais altérer la nature des supports ponctuels. Il n'en est pas de même des secondes; considérons en effet la multiplicité du plan $(x, y)$ définie par les équations

$$(15) \qquad x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad y' = p(t);$$

la multiplicité correspondante du plan (X, Y) aura un support ponctuel dont on obtiendra l'équation en éliminant $x$, $y$, $y'$ et $t$ entre les deux premières équations (14) et les trois équations (15). En particulier à la multiplicité

$$x = a, \qquad y = b, \qquad y' = t,$$

qui a pour support ponctuel le point $(a, b)$ correspondra une multiplicité ayant pour support ponctuel la courbe

$$F(a, b, X, Y) = 0.$$

Donc à tout point du plan $(x, y)$, la transformation de contact définie par les équations (14) fait correspondre une courbe du plan (X, Y), et de même à tout point du plan (X, Y) correspond une courbe du plan $(x, y)$. Autrement dit cette transformation fait correspondre *en général* une courbe à une courbe; toutefois il existe dans le plan $(x, y)$, une congruence de courbes,

$$F(x, y, \alpha, \beta) = 0;$$

à chacune desquelles ne correspond qu'un point $(\alpha, \beta)$ du plan (X, Y), et de même il existe dans le plan (X, Y) une congruence de courbes

$$F(a, b, X, Y) = 0$$

à chacune desquelles ne correspond qu'un point $(a, b)$ du plan $(x, y)$.

Du point de vue de la géométrie des multiplicités, on remarquera qu'il n'y a aucune différence essentielle entre les deux types de transformations de contact : c'est ce qui explique l'importance des notions ci-dessus introduites.

Rappelons que nous avons rencontré précédemment (n° 19), sous le nom de transformations dualistiques, une classe importante de transformations de contact non ponctuelles, correspondant à une équation fondamentale linéaire en $(x, y)$ et en (X, Y). Par exemple la transformation de Legendre est, on s'en assurera sans difficulté, une transformation par polaires réciproques relativement à la parabole

$$x^2 - 2y = 0.$$

**242**. Pour donner une application intéressante de la théorie des transformations de contact, considérons l'équation différentielle

$$f(x, y, y') = 0. \tag{16}$$

Les éléments de contact, en nombre $\infty^2$, qui satisfont à cette équation, sont appelés *éléments intégraux*. Toute multiplicité formée d'éléments intégraux est une *multiplicité intégrale* de l'équation (16) : intégrer cette équation, c'est répartir les éléments intégraux en multiplicités.

Si le support ponctuel d'une multiplicité intégrale est une courbe, ce sera évidemment une courbe intégrale au sens ordinaire. Mais il pourra exister des multiplicités intégrales ayant pour support ponctuel un point : on voit que

l'introduction de la notion de multiplicité permet d'élargir le problème de l'intégration des équations différentielles.

Les équations de la transformation de contact (11) font correspondre, aux $\infty^2$ éléments intégraux de l'équation (16), $\infty^2$ éléments de contact satisfaisant à l'équation

$$(17) \qquad F(X, Y, Y') = 0;$$

il est clair que toute multiplicité intégrale de l'équation (16) sera transformée en une multiplicité intégrale de l'équation (17) et réciproquement. Il en résulte que si l'on sait intégrer l'une de ces équations, on saura intégrer l'autre.

Considérons par exemple l'équation de CLAIRAUT

$$(18) \qquad y = xy' + f(y'),$$

et appliquons-lui la transformation de LEGENDRE

$$(19) \qquad X = y', \qquad Y = xy' - y, \qquad Y' = x.$$

Cette équation devient

$$(20) \qquad Y + f(X) = 0.$$

Les multiplicités qui satisfont à l'équation (20) sont celles qui ont pour support ponctuel un point quelconque de la courbe C représentée par l'équation (20); elles sont donc définies par des équations telles que

$$X = a, \qquad Y = -f(a), \qquad Y' = t,$$

où $a$ désigne une constante et $t$ un paramètre variable. On tire d'ailleurs des équations (19)

$$x = Y', \qquad y = XY' - Y, \qquad y' = X,$$

de sorte que les multiplicités intégrales correspondantes de l'équation (18) sont définies par les équations

$$x = t, \qquad y = at + f(a), \qquad y' = a.$$

Les supports ponctuels de ces multiplicités sont les droites

$$(21) \qquad y = ax + f(a),$$

qui constituent les intégrales au sens ordinaire.

Il existe encore une multiplicité satisfaisant à l'équation (20), c'est celle qui a pour support ponctuel la courbe C. Cette multiplicité a évidemment un élément commun avec chacune des multiplicités précédentes. Il lui correspondra donc, par la transformation de LEGENDRE, une multiplicité dont le support ponctuel sera l'enveloppe des droites (21); on retrouve ainsi l'intégrale singulière de l'équation de CLAIRAUT.

Considérons encore l'équation de LAGRANGE

$$y = xf(y') + \varphi(y').$$

Il lui correspond, par la transformation de Legendre, l'équation

$$Y'[X - f(X)] - Y = \varphi(X);$$

c'est une équation linéaire; nous pouvons donc affirmer *a priori* que l'intégration de l'équation de Lagrange se ramène à des quadratures.

Pour bien préciser la méthode, nous traiterons complètement le cas de l'équation

(22) $$y = xy'^2 + 1;$$

elle devient, par la transformation de Legendre,

(23) $$Y'(X - X^2) - Y = 1.$$

Cette équation linéaire s'intègre aisément, et l'on trouve

$$Y = \frac{aX - 1}{1 - X},$$

d'où l'on tire

$$Y' = \frac{a - 1}{(1 - X)^2}.$$

On peut donc représenter les multiplicités intégrales de l'équation (23) par les équations

$$X = t, \qquad Y = \frac{at - 1}{1 - t}, \qquad Y' = \frac{a - 1}{(1 - t)^2};$$

celles de l'équation (22) seront alors représentées par les équations

$$x = \frac{a - 1}{(1 - t)^2}, \qquad y = \frac{at^2 - 2t + 1}{(1 - t)^2}, \qquad y' = t;$$

les deux premières donnent les équations paramétriques des courbes intégrales, ce sont les paraboles

$$(y - x - a)^2 - 4(a - 1)x = 0.$$

L'équation (23) admet en outre les multiplicités intégrales

$$X = 1, \qquad Y = -1, \qquad Y' = t,$$
$$X = 0, \qquad Y = -1, \qquad Y' = t,$$

auxquelles correspondent, pour l'équation (22), les multiplicités intégrales

$$x = t, \qquad y = t + 1, \qquad y' = 1,$$
$$x = t, \qquad y = 1, \qquad y' = 0;$$

la première a pour support ponctuel la droite

$$y = x + 1;$$

c'est la courbe intégrale correspondant à $a = 1$; la seconde a pour support ponctuel la droite

$$y = 1;$$

c'est l'intégrale singulière de l'équation (22).

**243.** Toutes les notions précédentes s'étendent sans difficulté à l'espace à trois dimensions. Contentons-nous d'indiquer la marche à suivre.

On appelle *élément de contact* dans l'espace l'ensemble d'un point et d'un plan passant par ce point. Soient $(x, y, z)$ les coordonnées cartésiennes du point; l'équation du plan pourra se mettre sous la forme

$$Z - z - p(X - x) - q(Y - y) = 0.$$

Un élément de contact peut donc être défini par les cinq coordonnées $(x, y, z, p, q)$. On dit qu'un élément de contact appartient à une courbe ou à une surface si la courbe ou la surface sont tangentes en ce point au plan associé.

Supposons que $x, y, z, p$ et $q$ soient des fonctions d'un paramètre $\alpha$; aux différentes valeurs de $\alpha$ correspondront $\infty^1$ éléments. Si l'on a identiquement

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

on dit que ces éléments de contact forment une *multiplicité à une dimension*, et l'ensemble des points de la multiplicité en est le *support ponctuel.*

Le support ponctuel peut être un point; la multiplicité se compose alors du point et de $\infty^1$ plans enveloppant un cône qui a son sommet en ce point.

Quand le support ponctuel est une courbe, la multiplicité se compose de la courbe et d'une famille à un paramètre de plans tangents à la courbe; ces plans enveloppent une développable sur laquelle se trouve située la courbe; on peut donc dire que la multiplicité se compose d'une courbe et d'une développable passant par la courbe. Nous rencontrerons de telles multiplicités dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Supposons que $x, y, z, p, q$ soient des fonctions de deux paramètres $\alpha$ et $\beta$; aux différentes valeurs de $\alpha$ et $\beta$ correspondront $\infty^2$ éléments. Si l'on a identiquement

$$dz - p dx - q\,dy = 0,$$

on dit que ces éléments de contact forment une *multiplicité à deux dimensions*, et l'ensemble des points de la multiplicité en est le *support ponctuel.*

Le support ponctuel peut être un point; la multiplicité se compose alors du point et des $\infty^2$ plans passant par ce point.

Le support ponctuel peut être une courbe; la multiplicité se compose alors des $\infty^1$ points de la courbe, chacun de ces points étant associé successivement aux $\infty^1$ plans tangents à la courbe en ce point.

Enfin le support ponctuel peut être une surface; la multiplicité se compose alors des $\infty^2$ points de la surface, chacun d'eux étant associé au plan tangent correspondant.

Les équations

$$\begin{gathered} X = X(x, y, z, p, q), \qquad Y = Y(x, y, z, p, q), \qquad Z = Z(x, y, z, p, q), \\ P = P(x, y, z, p, q), \qquad Q = Q(x, y, z, p, q) \end{gathered} \tag{24}$$

font correspondre à tout élément de contact de l'espace $(x, y, z)$ un élément de contact de l'espace $(X, Y, Z)$. On dit que ces équations définissent une *transformation de contact* si l'on a identiquement une relation de la forme

$$dZ - P dX - Q dY = \rho(x, y, z, p, q)(dz - p dy - q dy). \tag{25}$$

Les équations (24) font alors correspondre à toute multiplicité de l'un des espaces une multiplicité de l'autre. Quelle que soit la nature des supports ponctuels de ces multiplicités, point, courbe ou surface, on dit qu'ils se correspondent par la transformation de contact.

On verrait, comme dans le plan, qu'une telle transformation conserve les contacts. Considérons par exemple deux surfaces tangentes $s$ et $s_1$; si elles sont changées en une courbe C et une surface $S_1$, C et $S_1$ seront tangentes; si elles sont changées en deux courbes C et $C_1$, ces deux courbes auront un point commun, et à l'élément de contact commun à $s$ et $s_1$ correspondra l'élément de contact formé par le point d'intersection de C et $C_1$ et le plan des tangentes à C et $C_1$ en ce point.

Dans le cas où les seconds membres des trois premières équations (24) ne contiennent pas $p$ et $q$, on a une première espèce de transformations de contact, les transformations *ponctuelles*. Ces transformations conservent la nature des supports ponctuels des multiplicités en correspondance.

Si l'élimination de $p$ et $q$ entre les trois premières équations (24) conduit à deux relations distinctes de la forme

$$F_1(X, Y, Z, x, y, z)=0, \qquad F_2(X, Y, Z, x, y, z)=0,$$

à chaque point $m(x, y, z)$ ces relations font correspondre une courbe $\Gamma$ de l'espace (X, Y, Z), et la multiplicité qui a pour support ponctuel le point $m$ est transformée, on le voit sans peine, en la multiplicité qui a pour support ponctuel $\Gamma$. Si le point $m$ engendre une courbe $c$, les courbes $\Gamma$ correspondantes engendrent une surface S qui est la transformée de $c$; si le point $m$ engendre une surface $s$, les courbes $\Gamma$ correspondantes forment une congruence dont la surface focale S est la transformée de $s$. On a ainsi une seconde espèce de transformations de contact, qui changent les points en courbes et les courbes en surfaces.

Une transformation très importante de ce type a été construite par Sophus Lie : elle change les droites en sphères. Il en résulte que toute surface réglée est transformée en une surface enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre; en particulier les quadriques, qui ont deux familles de génératrices rectilignes, sont transformées en cyclides de Dupin.

Supposons enfin que l'élimination de $p$ et $q$ entre les trois premières équations (24) conduise à une seule relation de la forme

$$F(X, Y, Z, x, y, z)=0; \tag{26}$$

à chaque point $m(x, y, z)$ l'équation ci-dessus fait correspondre une surface $\Sigma$, et la multiplicité qui a pour support ponctuel le point $m$ est transformée en la multiplicité qui a pour support ponctuel la surface $\Sigma$. Si le point $m$ décrit une courbe $c$ ou une surface $s$, les surfaces $\Sigma$ correspondantes enveloppent une surface S, qui est la transformée de $c$ ou de $s$. C'est le troisième type de transformations de contact : elles changent les points et les courbes en surfaces. Examinons rapidement ce dernier type.

Le point $(x, y, z)$ étant assujetti à décrire une surface $s$, soient $p$ et $q$ les

valeurs des dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en tout point de $s$. L'élément de contact ($x$, $y$, $z$, $p$, $q$) sera formé d'un point de $s$ et du plan tangent en ce point. Soient S la transformée de $s$, (X, Y, Z) un point de S, P et Q les valeurs des dérivées $\frac{\partial Z}{\partial X}$ et $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ en ce point; l'élément de contact (X, Y, Z, P, Q) sera formé d'un point de S et du plan tangent en ce point.

Ceci posé, soit

$$z = f(x, y)$$

l'équation de $s$. On aura, d'après ce qui précède, l'équation de S en éliminant $x$, $y$, $z$, $p$ et $q$ entre les équations

$$F(X, Y, Z, x, y, z) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

$$z = f(x, y), \qquad p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Les trois premières sont indépendantes de $s$; elles feront connaître X, Y et Z en fonction de $x$, $y$, $z$, $p$ et $q$. Pour avoir P et Q différentions l'équation (26); on aura

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial X}dX + \frac{\partial F}{\partial Y}dY + \frac{\partial F}{\partial Z}dZ = 0,$$

d'où, en tenant compte des équations

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$\frac{\partial F}{\partial X}dX + \frac{\partial F}{\partial Y}dY + \frac{\partial F}{\partial Z}dZ = 0$$

et par suite, puisque $dZ = P\,dX + Q\,dY$,

$$\frac{\partial F}{\partial X} + P\frac{\partial F}{\partial Z} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial Y} + Q\frac{\partial F}{\partial Z} = 0.$$

Il en résulte que si l'on connaît la relation (26), qui est appelée l'*équation fondamentale* de la transformation de contact, on obtiendra les équations de cette transformation en résolvant par rapport à X, Y, Z, P et Q le système

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial X} + P\frac{\partial F}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial Y} + Q\frac{\partial F}{\partial Z} = 0.$$

Prenons par exemple pour équation fondamentale

$$Z + z - Xx - Yy = 0;$$

on en déduira la transformation de contact

$$X = p, \qquad Y = q, \qquad Z = px + qy - z, \qquad P = x, \qquad Q = y,$$

qui est appelée *transformation de* LEGENDRE.

Les transformations dualistiques de l'espace (n° 47) sont des transformations de ce troisième type; par exemple la transformation de LEGENDRE est une transformation par polaires réciproques relativement au paraboloïde

$$x^2 + y^2 - 2z = 0.$$

L'équation aux dérivées partielles

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \tag{27}$$

définit $\infty^4$ éléments de contact qui sont appelés *éléments intégraux* de cette équation. Toute multiplicité formée d'éléments intégraux est une *multiplicité intégrale*; intégrer l'équation (27), c'est répartir les éléments intégraux en multiplicités.

Si le support ponctuel d'une multiplicité intégrale est une surface, ce sera une surface intégrale au sens ordinaire; mais il pourra exister des multiplicités intégrales ayant pour support ponctuel un point ou une courbe, de telle sorte qu'ici encore la notion de multiplicité permet d'élargir le problème de l'intégration.

Les équations (24) d'une transformation de contact font correspondre aux $\infty^4$ éléments intégraux de l'équation (27) $\infty^4$ éléments intégraux représentés par une équation telle que

$$F(X, Y, Z, P, Q) = 0. \tag{28}$$

Toute multiplicité intégrale de l'équation (27) sera transformée en une multiplicité intégrale de l'équation (28) et réciproquement. Il en résulte que si l'on sait intégrer une de ces équations on saura intégrer l'autre.

On verra plus loin des applications de cette méthode.

## § IV. — Équations de Monge. Complexes de droites.

**244.** L'extension à l'espace de la notion d'élément de contact du plan $(x, y, y')$, formé d'un point et d'une droite passant par ce point, nous a conduits à l'élément de contact $(x, y, z, p, q)$ formé d'un point et d'un plan passant par ce point. Cette extension peut être dirigée d'une autre façon; on peut, en effet, dans l'espace comme dans le plan, considérer l'élément de contact formé d'un point et d'une droite passant par ce point : on pourra le définir par les coordonnées $(x, y, z, dx, dy, dz)$, les trois dernières n'intervenant en réalité que par leur rapport et représentant un système de paramètres directeurs d'une droite *quelconque* issue du point $(x, y, z)$. Toute courbe constitue un ensemble de $\infty^1$ éléments de contact de cette espèce, formé des points de la courbe et des tangentes à la courbe. Pour éviter toute confusion, on donne à l'élément de contact $(x, y, z, p, q)$ le nom d'*élément superficiel*, et à l'élément de contact $(x, y, z, dx, dy, dz)$ le nom d'*élément linéaire*.

Un élément linéaire dépend donc de *cinq* paramètres, comme un élément

superficiel, et cette particularité permet de prévoir que nous pourrons établir des relations entre les ensembles d'éléments de contact des deux espèces; nous allons en donner un exemple très important.

L'espace comprend, nous venons de le dire, $\infty^5$ éléments de contact de chaque espèce. Un ensemble de $\infty^4$ éléments superficiels est donc défini par une équation de la forme

$$(29) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

qui est une équation aux dérivées partielles du premier ordre. De même un ensemble de $\infty^4$ éléments linéaires est défini par une équation

$$(30) \qquad \Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

qu'on appelle *équation de* MONGE. Pour nous borner au cas usuel, nous supposerons que $\Phi$ est un polynome en $dx$, $dy$, $dz$. Alors, un élément de contact n'étant pas modifié quand on remplace $dx$, $dy$, $dz$, par $hdx$, $hdy$, $hdz$, la fonction $\Phi$ est homogène en $dx$, $dy$, $dz$.

L'intégration de l'équation de MONGE consistera à déterminer les courbes dont tous les éléments linéaires satisfont à l'équation considérée. Si l'on pose $y = f(x)$, $f$ désignant une fonction arbitraire, l'équation (30) devient une équation différentielle ordinaire entre $x$ et $z$; il en résulte que l'intégrale générale de l'équation de MONGE dépend d'une fonction arbitraire.

A chaque point $(x, y, z)$ l'équation (30) fait correspondre $\infty^1$ éléments linéaires qui forment un cône, le *cône élémentaire* associé à l'équation (30). Toute courbe intégrale de l'équation (30) sera donc tangente en chacun de ses points à une génératrice du cône élémentaire, *et réciproquement*.

Supposons d'abord que le cône élémentaire ne se réduise pas à un plan, c'est-à-dire que l'équation (30) ne soit pas linéaire en $dx$, $dy$, $dz$. Alors aux $\infty^1$ éléments *linéaires* associés par l'équation (30) au point $(x, y, z)$ correspondent $\infty^1$ éléments *superficiels* formés du point $(x, y, z)$ et des plans tangents en ce point au cône élémentaire. Comme l'espace comprend $\infty^3$ points, il existe $\infty^4$ éléments superficiels associés ainsi à l'équation (30), et ces éléments vérifient par suite une équation aux dérivées partielles, de la forme (29), qu'on pourra déduire de l'équation (30). A chaque équation de MONGE on peut ainsi associer une équation aux dérivées partielles du premier ordre de telle sorte que toute surface intégrale de la seconde soit tangente en chacun de ses points au cône élémentaire de la première; nous verrons plus tard que les courbes définies par l'équation (30) jouent un rôle important dans la théorie de l'intégration de l'équation (29) associée (*courbes intégrales*).

Si le cône élémentaire associé à l'équation (30) se réduit à un plan, cette équation sera de la forme

$$(31) \qquad P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0$$

(*équation de* PFAFF). Il n'existe plus que $\infty^3$ éléments superficiels associés; une étude ultérieure de l'équation de PFAFF montrera qu'*en général*, c'est-à-

dire si les coefficients P, Q, R ne vérifient pas une certaine relation d'égalité, il est impossible de grouper ces $\infty^3$ éléments superficiels de façon à obtenir une famille de surfaces; autrement dit, l'équation (31) n'est pas en général intégrable sous la forme

$$\Omega(x, y, z) = C^{te}.$$

**245.** Notre but n'est pas d'étudier d'une façon générale l'équation (30); nous examinerons simplement le cas où cette équation admet comme intégrale une famille de droites à *trois* paramètres, un *complexe* de droites. Par tout point de l'espace, il passe dans ce cas une infinité de droites du complexe qui forment le cône élémentaire associé à l'équation (30), et pour déterminer cette équation il suffira de trouver la relation que doivent vérifier les $\infty^1$ éléments linéaires attachés au point $(x, y, z)$.

Soient

$$(32) \qquad \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

les équations générales de la droite. On en tire

$$bz - cy = bz_0 - cy_0, \qquad cx - az = cx_0 - az_0, \qquad ay - bx = ay_0 - bx_0,$$

et il est clair que ces trois équations se réduisent à deux. Posant alors

$$bz_0 - cy_0 = l, \qquad cx_0 - az_0 = m, \qquad ay_0 - bx_0 = n,$$

on aura

$$(33) \qquad al + bm + cn = 0.$$

On donne aux coefficients $(a, b, c, l, m, n)$, liés par l'équation (33), le nom de *coordonnées plückériennes* de la droite, du nom du géomètre Plücker, qui en a fait le premier un emploi systématique. Ces six coordonnées définissent complètement une droite; elles permettent en effet d'écrire ses équations cartésiennes sous la forme

$$bz - cy = l, \qquad cx - az = m, \qquad ay - bx = n.$$

Comme ces six paramètres figurent de façon homogène, et que d'autre part ils sont liés par l'équation (33), il reste bien quatre paramètres essentiels dans les équations de la droite.

Toute relation algébrique homogène entre $a, b, c, l, m, n$, distincte de (33), définit un complexe *algébrique* de droites. Soient

$$(34) \qquad F(a, b, c, l, m, n) = 0$$

une telle relation, $(x, y, z)$ un point d'une droite du complexe; on aura sur cette droite

$$l = bz - cy, \qquad m = cx - az, \qquad n = ay - bx,$$

et par suite

$$\frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b} = \frac{Z-z}{c} = \frac{(Y-y)z - (Z-z)y}{l} = \frac{(Z-z)x - (X-x)z}{m}$$
$$= \frac{(X-x)y - (Y-y)x}{n}.$$

En particulier, on aura tous les éléments linéaires appartenant aux droites du complexe issues du point $(x, y, z)$ en prenant pour point (X, Y, Z) un point $(x+dx, y+dy, z+dz)$ infiniment voisin de $(x, y, z)$ sur la droite dont les coordonnées plückériennes sont $a$, $b$, $c$, $l$, $m$, $n$, ce qui donne

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{c}=\frac{z\,dy-y\,dz}{l}=\frac{x\,dz-z\,dx}{m}=\frac{y\,dx-x\,dy}{n};$$

les coefficients $a$, $b$, $c$, $l$, $m$, $n$ devant vérifier l'équation homogène (34), on aura finalement

$$\text{(35)}\qquad F(dx, dy, dz, z\,dy-y\,dz, x\,dz-z\,dx, y\,dx-x\,dy)=0.$$

C'est l'équation de Monge associée au complexe (34); le premier membre est une fonction homogène de ses six arguments.

Inversement toute équation de Monge de la forme (35) admet comme intégrales, d'après le calcul même que nous venons d'effectuer, les droites du complexe défini par l'équation (34). On voit que la théorie des complexes de droites est liée intimement à l'étude d'une équation de Monge de forme particulière, l'équation (35); montrons-le encore sur un exemple.

**246.** L'intégrale générale d'une équation de Monge dépendant d'une fonction arbitraire, le complexe (34) n'épuise pas l'ensemble des courbes intégrales, celles-ci étant assujetties seulement à être tangentes en chacun de leurs points à une droite du complexe. On donne aux courbes intégrales distinctes des droites du complexe le nom de *courbes du complexe*.

Soient $\Gamma$ une telle courbe, $(x, y, z)$ un point de $\Gamma$, enfin $t$ le paramètre qui fixe la position d'un point sur la courbe. On aura, en désignant par des accents les dérivées relatives au paramètre,

$$F(x', y', z', zy'-yz', xz'-zx', yx'-xy')=0;$$

pour simplifier, soit $\Phi(x, y, z, x', y', z')$ le premier membre de cette équation. On aura

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial m}z'-\frac{\partial F}{\partial n}y',\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial n}x'-\frac{\partial F}{\partial l}z',\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial l}y'-\frac{\partial F}{\partial m}x',$$

où nous avons écrit $l$, $m$, $n$ à la place des trois derniers arguments de la fonction F. On en tire

$$x'\frac{\partial\Phi}{\partial x}+y'\frac{\partial\Phi}{\partial y}+z'\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0.$$

D'ailleurs, la fonction $\Phi$, considérée comme fonction de $t$, est identiquement nulle sur $\Gamma$; on a donc

$$x'\frac{\partial\Phi}{\partial x}+y'\frac{\partial\Phi}{\partial y}+z'\frac{\partial\Phi}{\partial z}+x''\frac{\partial\Phi}{\partial x'}+y''\frac{\partial\Phi}{\partial y'}+z''\frac{\partial\Phi}{\partial z'}=0,$$

d'où

$$\text{(36)}\qquad x''\frac{\partial\Phi}{\partial x'}+y''\frac{\partial\Phi}{\partial y'}+z''\frac{\partial\Phi}{\partial z'}=0.$$

Enfin, l'équation $F=0$ étant celle d'un complexe, $\Phi$ est homogène en $x'$, $y'$, $z'$, et l'équation $\Phi=0$ entraîne

$$x'\frac{\partial\Phi}{\partial x'}+y'\frac{\partial\Phi}{\partial y'}+z'\frac{\partial\Phi}{\partial z'}=0. \tag{37}$$

On tire des équations (36) et (37) les proportions

$$\frac{y'z''-z'y''}{\frac{\partial\Phi}{\partial x'}}=\frac{z'x''-x'z''}{\frac{\partial\Phi}{\partial y'}}=\frac{x'y''-y'x''}{\frac{\partial\Phi}{\partial z'}};$$

les numérateurs forment un système de paramètres directeurs du plan osculateur à $\Gamma$ au point $(x, y, z)$; pour interpréter géométriquement les dénominateurs, remarquons que l'équation

$$\Phi(x, y, z, x', y', z')=0,$$

où $x, y, z$ sont donnés, caractérise les directions des génératrices du cône du complexe, en sorte que l'équation de ce cône s'écrit

$$\Phi(x, y, z, X-x, Y-y, Z-z)=0;$$

si on se rappelle que la fonction $\Phi$ est homogène en $x'$, $y'$, $z'$, et que $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ sont proportionnels à $x'$, $y'$, $z'$, on voit que les paramètres directeurs du plan tangent au cône suivant la génératrice $(x', y', z')$ sont proportionnels à $\frac{\partial\Phi}{\partial x'}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y'}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z'}$. On a alors immédiatement la conséquence suivante : *toute courbe du complexe a pour plan osculateur en un point le plan tangent au cône élémentaire suivant la tangente à la courbe en ce point.* Par suite, *quand deux courbes du complexe ont un élément linéaire commun, elles ont même plan osculateur au point correspondant.*

**247.** *A chaque point de l'espace, l'équation du complexe fait correspondre*, nous l'avons vu, *un cône, le cône du complexe, ayant son sommet en ce point, et formé des droites du complexe issues de ce point.* Transformons dualistiquement cette proposition : une transformation dualistique change les droites en droites, et par suite un complexe en un autre complexe (nº 19). On aura donc la proposition suivante : *à chaque plan* $\Pi$ *de l'espace correspond une courbe* C *de ce plan, enveloppée par les droites du complexe situées dans le plan* $\Pi$.

On donne à la courbe C le nom de *courbe du complexe dans le plan* $\Pi$. En chacun de ses points, elle admet le plan $\Pi$ lui-même comme plan osculateur; par suite, en chaque point de la courbe C, le cône du complexe est tangent au plan $\Pi$, la génératrice de contact étant précisément la tangente à la courbe C au point considéré.

En particulier quand la fonction F est linéaire, l'équation (35) définit une classe de complexes spécialement intéressants, les *complexes linéaires*. On

voit d'abord que dans ce cas le cône du complexe dégénère en un plan : toutes les droites du complexe passant par un point P engendrent un plan Π; corrélativement, toutes les droites du complexe contenues dans un plan Π passent par un point P de ce plan : le point P est le *pôle* ou *foyer* du plan Π, qui est le *plan polaire* de P. A tout complexe linéaire est donc attachée une transformation dualistique qui a ceci de particulier qu'à tout plan Π correspond un point *situé dans ce plan*. On sait [1] qu'on peut toujours, par un déplacement, amener deux figures qui se correspondent dans une telle dualité à devenir polaires réciproques par rapport à un paraboloïde hyperbolique.

Supposons maintenant que le complexe ne soit pas linéaire, et considérons une droite Δ du complexe; chaque point P de Δ est le sommet d'un cône du complexe, et quand le point P glisse sur Δ, le plan tangent au cône du complexe le long de Δ change en même temps que P [au moins si Δ n'a pas été choisie d'une façon particulière [2]]. A chaque point de Δ, l'équation du complexe fait donc correspondre un plan passant par Δ : nous allons étudier cette correspondance entre point et plan.

Soient $P(x, y, z)$ et $P_1(x_1, y_1, z_1)$ deux points de Δ, Π et $\Pi_1$ les plans associés; on aura

$$x_1 = x + \rho x', \qquad y_1 = y + \rho y', \qquad z_1 = z + \rho z'.$$

D'ailleurs, si $(a, b, c, l, m, n)$ sont les coordonnées plückériennes de Δ, on a

$$F(a, b, c, l, m, n) = 0,$$

où l'on peut prendre

$$a = x', \quad b = y', \quad c = z', \quad l = yz' - zy', \quad m = zx' - xz', \quad n = xy' - yx'.$$

Nous avons vu de plus qu'en posant

$$\Phi(x, y, z, x', y', z') \equiv F(a, b, c, l, m, n)$$

on pouvait prendre pour paramètres directeurs du plan Π

$$\lambda = \frac{\partial \Phi}{\partial x'} = \frac{\partial F}{\partial a} + z\frac{\partial F}{\partial m} - y\frac{\partial F}{\partial n}, \qquad \mu = \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial b} + x\frac{\partial F}{\partial n} - z\frac{\partial F}{\partial l},$$
$$\nu = \frac{\partial \Phi}{\partial z'} = \frac{\partial F}{\partial c} + y\frac{\partial F}{\partial l} - x\frac{\partial F}{\partial m};$$

on pourra de même prendre pour paramètres directeurs du plan $\Pi_1$

$$\lambda_1 = \frac{\partial F}{\partial a} + (z + \rho z')\frac{\partial F}{\partial m} - (y + \rho y')\frac{\partial F}{\partial n} = \lambda + \rho\left(c\frac{\partial F}{\partial m} - b\frac{\partial F}{\partial n}\right),$$
$$\mu_1 = \mu + \rho\left(a\frac{\partial F}{\partial n} - c\frac{\partial F}{\partial l}\right), \qquad \nu_1 = \nu + \rho\left(b\frac{\partial F}{\partial l} - a\frac{\partial F}{\partial m}\right).$$

---

(1) DARBOUX, *Principes de Géométrie analytique*, p. 103.

(2) Il existe des complexes *spéciaux* pour lesquels le plan considéré est invariable le long de *toute* génératrice Δ : nous excluons ces complexes de la présente étude.

Sur la droite $\Delta$, les quantités $c\frac{\partial F}{\partial m} - b\frac{\partial F}{\partial n}$, $a\frac{\partial F}{\partial n} - c\frac{\partial F}{\partial l}$, $b\frac{\partial F}{\partial l} - a\frac{\partial F}{\partial m}$ sont des constantes $\lambda_0$, $\mu_0$, $\nu_0$. L'équation du plan $\Pi_1$ sera donc de la forme

$$(\lambda + \rho\lambda_0)(X - x) + (\mu + \rho\mu_0)(Y - y) + (\nu + \rho\nu_0)(Z - z) = 0.$$

Autrement dit, les plans associés aux différents points de $\Delta$ forment un faisceau (n° 16), et, d'après la signification évidente du paramètre $\rho$, il y a correspondance homographique entre un point de $\Delta$ et le plan associé : le rapport anharmonique de quatre points de $\Delta$ est donc égal à celui des quatre plans correspondants.

Nous n'insisterons pas davantage sur la théorie des complexes, renvoyant, pour une étude plus détaillée, soit à l'*Initiation aux méthodes vectorielles* de MM. Bouligand et Rabaté pour les complexes linéaires, soit aux belles *Leçons de Géométrie supérieure* de M. Vessiot. Signalons cependant encore pour ce qui concerne les complexes linéaires, que deux courbes du complexe qui ont un élément linéaire commun ont non seulement au point correspondant même plan osculateur (le plan du complexe), mais aussi même torsion, et que cette propriété caractérise les complexes linéaires [1].

## § V. — Compléments de calcul vectoriel.

**248.** Le calcul vectoriel, appliqué à l'étude des courbes et des surfaces, outre les simplifications incontestables qu'il apporte dans l'exposé de la théorie, présente l'avantage de n'introduire que des grandeurs ayant une signification géométrique précise, liée aux courbes et surfaces étudiées, et par suite indépendantes du choix des axes de référence : nous dirons que de telles grandeurs ont un *caractère invariant*.

Nous allons montrer, moyennant quelques notions complémentaires, que le calcul vectoriel peut aussi servir à manifester le caractère invariant de certaines formules analytiques, caractère qui n'apparaît pas à première vue avec les notations cartésiennes.

Dans tout ce qui suit, nous n'utiliserons que des axes rectangulaires, et pour simplifier l'exposition, nous nous placerons d'abord dans le cas du plan, l'extension à l'espace à trois dimensions ne souffrant aucune difficulté. De plus, bien que cette hypothèse ne soit pas essentielle, nous supposerons que toutes les fonctions considérées dans le présent paragraphe sont des fonctions analytiques de leurs arguments.

**249.** Rapportons le plan à deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$, et soit $F(x, y)$ une fonction définie dans une certaine région R du plan. On peut remplacer la notation $F(x, y)$ par la notation $F(M)$, M désignant le point de coordonnées $(x, y)$ ; $F(M)$ est une *fonction de point*.

---

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, mai 1925. Voir aussi B. Gambier, *Bulletin des sciences mathématiques*, t. 50, 1926, p. 43, et G. Cerf, *Nouvelles Annales*, février 1926.

On appelle *gradient* de la fonction F(M) au point M, et on représente par la notation

$$\mathbf{grad}\, F(M),$$

un vecteur lié à ce point et ayant pour composantes $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$.

Soit $M_0$ un point de R; l'équation

$$F(M) - F(M_0) = 0$$

définit une courbe Γ qui passe par ce point. Le vecteur $\mathbf{grad}\, F(M_0)$ est évidemment normal en $M_0$ à Γ. On a d'ailleurs

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = \mathbf{grad}\, F . d\mathbf{M};$$

prenons sur la normale en $M_0$ à Γ un point $M_1$ infiniment voisin de $M_0$; on aura, d'après la formule précédente,

$$F(M_1) - F(M_0) = \mathbf{grad}\, F(M_0) . \mathbf{M_0 M_1}.$$

Le produit scalaire du second membre est positif si $\mathbf{M_0M_1}$ a même sens que le gradient, et négatif dans le cas contraire; donc F(M) croît quand M se déplace dans le sens du gradient et décroît dans le cas contraire. Autrement dit le gradient de F(M) au point $M_0$ est dirigé suivant la normale à Γ en $M_0$ du côté où F(M) va en croissant. De plus, la grandeur du gradient est la limite du rapport

$$\frac{F(M_1) - F(M_0)}{M_0 M_1}$$

quand le point $M_1$ tend vers $M_0$ sur la demi-normale à Γ située du côté où F(M) va en croissant.

Le gradient de la fonction F(M) a donc une signification géométrique indépendante du choix des axes : c'est une grandeur invariante [1]. On peut le vérifier analytiquement de la façon suivante.

Considérons dans le plan un second système d'axes $O_1x_1, O_1y_1$, et soient

$$(38) \qquad x_1 = a + \alpha x + \beta y, \qquad y_1 = b + \alpha_1 x + \beta_1 y$$

les formules du changement d'axes. La fonction F(M) s'exprime au moyen des nouvelles coordonnées, et le gradient au point M a pour projections sur les nouveaux axes $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial y_1}$; il s'agit de montrer que ce vecteur est identique au vecteur de projections $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ sur les anciens axes, autrement dit d'établir les relations

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \alpha \frac{\partial F}{\partial x_1} + \alpha_1 \frac{\partial F}{\partial y_1}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \beta \frac{\partial F}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial F}{\partial y_1};$$

or ces relations résultent immédiatement des formules (38).

---

[1] Le plan des $xy$ étant supposé horizontal, à chaque point M faisons correspondre le point de cote F(M) qui se projette en M. A la région R correspond une surface : on vérifiera que **grad** F(M) est dirigé suivant la projection de la demi-tangente ascendante à une ligne de plus grande pente, et que le nombre qui mesure sa longueur est égal à cette pente maximum.

Soient $\Delta$ une demi-droite quelconque issue du point M, $\mathbf{u}$ le vecteur unitaire d'origine M porté par $\Delta$, enfin M′ un point de $\Delta$ très voisin de M. On appelle *dérivée* de la fonction F(M) *suivant la demi-droite* $\Delta$ la limite du rapport

$$\frac{F(M')-F(M)}{MM'}$$

quand la longueur MM′ tend vers zéro. Posons

$$\mathbf{MM'}=\mathbf{u}dl \qquad \text{avec} \qquad dl>0;$$

la dérivée suivant $\Delta$ sera égale à $\frac{dF}{dl}$. On a d'ailleurs

$$dF=\mathbf{grad}\,F.\mathbf{MM'}=\mathbf{grad}\,F.\mathbf{u}dl$$

et par suite

$$\frac{dF}{dl}=\mathbf{grad}\,F.\mathbf{u}.$$

Le gradient permet donc d'évaluer la dérivée de la fonction de point F(M) suivant une demi-droite quelconque.

A chaque point $M(x, y)$ du plan, faisons maintenant correspondre un vecteur $\mathbf{V}(M)$ de composantes $X(x, y)$ et $Y(x, y)$; nous définissons ainsi dans le plan un *champ vectoriel.* La fonction de point

$$\varphi(M)=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}$$

s'appelle la *divergence* du champ au point M et se représente par la notation

$$\mathrm{div}\,\mathbf{V}(M).$$

Nous allons voir que cette grandeur a un caractère invariant.

Soient, en effet, relativement aux nouveaux axes, $X_1$ et $Y_1$ les composantes du vecteur $\mathbf{V}$. On aura, avec les notations précédentes,

$$X=\alpha X_1+\alpha_1 Y_1, \qquad \frac{\partial X}{\partial x}=\alpha\left(\alpha\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\alpha_1\frac{\partial X_1}{\partial y_1}\right)+\alpha_1\left(\alpha\frac{\partial Y_1}{\partial x_1}+\alpha_1\frac{\partial Y_1}{\partial y_1}\right),$$

$$Y=\beta X_1+\beta_1 Y_1, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y}=\beta\left(\beta\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\beta_1\frac{\partial X_1}{\partial y_1}\right)+\beta_1\left(\beta\frac{\partial Y_1}{\partial x_1}+\beta_1\frac{\partial Y_1}{\partial y_1}\right),$$

et par suite

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Y_1}{\partial y_1}.$$

La divergence a donc bien un caractère invariant.

On verrait de même que le scalaire $\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}$ a un caractère invariant. Il en résulte que la formule de Green

$$\int_\Gamma X dx+Y dy=\int\int_C\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

qui peut s'écrire $\int_\Gamma \mathbf{V}.d\mathbf{M}=\int\int_C\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)d\sigma,$

a un caractère invariant.

**250.** Les notions de gradient et de divergence s'étendent immédiatement à l'espace à trois dimensions. Soit F(M) une fonction de point, M désignant le point de coordonnées $(x, y, z)$. Le gradient de la fonction F au point M est un vecteur de composantes $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$; on a donc

$$dF = \mathbf{grad}\, F \,.\, d\mathbf{M}.$$

C'est une grandeur invariante [1]. Enfin la dérivée de la fonction F(M) suivant une demi-droite caractérisée par le vecteur unité $\boldsymbol{u}$ est donnée par la formule

$$\frac{dF}{dl} = \mathbf{grad}\, F \,.\, \boldsymbol{u}.$$

Si à chaque point M on associe un vecteur $\mathbf{V}$(M) de composantes (X, Y, Z), on appelle divergence du champ vectoriel en M le scalaire

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

et on vérifie comme dans le plan que cette grandeur a un caractère invariant.

Dans l'espace à trois dimensions, on est conduit à introduire un nouvel élément invariant du champ vectoriel $\mathbf{V}$(M) : c'est le vecteur de composantes

$$\xi = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \qquad \eta = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad \zeta = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

qu'on appelle le *rotationnel* du champ, et qu'on désigne par la notation **rot V**. Nous allons montrer que le rotationnel est bien une grandeur invariante.

Soient

$$x_1 = a + \alpha x + \beta y + \gamma z,$$
$$y_1 = b + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z,$$
$$z_1 = c + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z$$

les formules d'un changement d'axes, $(X_1, Y_1, Z_1)$ les composantes du vecteur **V** par rapport aux nouveaux axes. On aura

$$Y = \beta X_1 + \beta_1 Y_1 + \beta_2 Z_1, \qquad Z = \gamma X_1 + \gamma_1 Y_1 + \gamma_2 Z_1,$$

d'où, en tenant compte des formules du changement d'axes et des relations bien connues fournies par le tableau des cosinus directeurs,

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = \xi = \alpha\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y_1} - \frac{\partial Y_1}{\partial z_1}\right) + \alpha_1\left(\frac{\partial X_1}{\partial z_1} - \frac{\partial Z_1}{\partial x_1}\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial y_1}\right).$$

Si donc on pose

$$\xi_1 = \frac{\partial Z_1}{\partial y_1} - \frac{\partial Y_1}{\partial z_1}, \qquad \eta_1 = \frac{\partial X_1}{\partial z_1} - \frac{\partial Z_1}{\partial x_1}, \qquad \zeta_1 = \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial y_1},$$

on aura

$$\xi = \alpha\xi_1 + \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\zeta_1,$$

et de même

$$\eta = \beta\xi_1 + \beta_1\eta_1 + \beta_2\zeta_1, \qquad \zeta = \gamma\xi_1 + \gamma_1\eta_1 + \gamma_2\zeta_1;$$

c'est donc un seul et même vecteur qui a pour composantes $(\xi, \eta, \zeta)$ par rapport aux anciens axes et $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ par rapport aux nouveaux. Ainsi le rotationnel a bien un caractère invariant.

---

[1] Par exemple si F(M) est la température au point M d'une salle contenant une source calorique, **grad** F(M) est normal à la surface isotherme qui passe en M.

Notons encore, à propos du rotationnel, la formule suivante, qui s'établit immédiatement par le passage aux composantes; $\lambda$ désignant un scalaire, on a

$$\mathbf{rot}\lambda\mathbf{V} = \lambda\,\mathbf{rot}\,\mathbf{V} + \mathbf{grad}\lambda \wedge \mathbf{V}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que la formule de Stokes a une signification invariante. Cette formule s'écrit (n° 90)

$$\int_C X dx + Y dy + Z dz = \int\int_\Sigma \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dz\, dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

le sens de parcours de la courbe C étant lié comme on sait au choix d'un certain côté sur la surface $\Sigma$ limitée par C. Soient $\mathbf{N}$ le vecteur unité de la demi-normale à $\Sigma$ relative au côté choisi, $(\alpha, \beta, \gamma)$ ses composantes, enfin $d\sigma$ l'élément d'aire de $\Sigma$. Dans l'intégrale de surface qui figure au second membre de la formule de Stokes, on aura

$$dy\, dz = \alpha\, d\sigma, \qquad dz\, dx = \beta\, d\sigma, \qquad dx\, dy = \gamma\, d\sigma,$$

et la fonction à intégrer se réduit à $\mathbf{N}.\mathbf{rot}\mathbf{V}$; la formule de Stokes prend alors la forme

$$\int_C \mathbf{V}.d\mathbf{M} = \int\int_\Sigma \mathbf{N}.\mathbf{rot}\mathbf{V} d\sigma,$$

où le caractère invariant est mis en évidence [1].

La formule d'Ostrogradsky (n° 91),

$$\int\int_s X dy\, dz + Y dz\, dx + Z dx\, dy = \int\int\int_v \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz,$$

a aussi un caractère invariant; elle peut en effet s'écrire

$$\int\int_s \mathbf{V}.\mathbf{N} d\sigma = \int\int\int_v \mathrm{div}\mathbf{V} dv, \tag{39}$$

$\mathbf{N}$ désignant le vecteur unité porté par la demi-normale *extérieure* au volume $v$ limité par la surface fermée $s$.

Soit enfin $P(x, y, z) = P(M)$ une fonction de point; posons

$$\Delta_2 P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2};$$

avec les notations précédentes on peut écrire $\Delta_2 P = \mathrm{div}\,\mathbf{grad}\, P(M)$, ce qui montre que $\Delta_2 P$ est une grandeur invariante.

Posons, dans la formule (39), $Q(M)$ désignant une autre fonction de point,

$$\mathbf{V}(M) = P(M)\,\mathbf{grad}\, Q(M),$$

et représentons par la notation $\frac{dQ}{dn}$ la dérivée de la fonction $Q(M)$ suivant la normale *intérieure* à $s$; on aura

$$\frac{dQ}{dn} = -\mathbf{grad}\, Q.\mathbf{N},$$

---

[1] On pourra consulter avec fruit, sur la géométrie de la formule de Stokes, l'intéressant fascicule de M. A. Buhl, *Géométrie et Analyse des Intégrales doubles* (Collection *Scientia*, n° 36).

et la formule (39) s'écrira

$$\iiint_v \operatorname{div}(\mathrm{P}\,\mathbf{grad}\,\mathrm{Q})\,dv + \iint_s \mathrm{P}\frac{d\mathrm{Q}}{dn}\,d\sigma = 0.$$

Or on a

$$\operatorname{div}(\mathrm{P}\,\mathbf{grad}\,\mathrm{Q}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{P}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{P}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{P}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z}\right)$$
$$= \mathbf{grad}\,\mathrm{P}\,.\,\mathbf{grad}\,\mathrm{Q} + \mathrm{P}\,\Delta_2\mathrm{Q},$$

et par suite

$$\iiint_v (\mathbf{grad}\,\mathrm{P}\,.\,\mathbf{grad}\,\mathrm{Q} + \mathrm{P}\,\Delta_2\mathrm{Q})\,dv + \iint_s \mathrm{P}\frac{d\mathrm{Q}}{dn}\,d\sigma = 0.$$

On aurait de même

$$\iiint_v (\mathbf{grad}\,\mathrm{Q}\,.\,\mathbf{grad}\,\mathrm{P} + \mathrm{Q}\,\Delta_2\mathrm{P})\,dv + \iint_s \mathrm{Q}\frac{d\mathrm{P}}{dn}\,d\sigma = 0,$$

et, en retranchant membre à membre,

$$\iiint_v (\mathrm{P}\,\Delta_2\mathrm{Q} - \mathrm{Q}\,\Delta_2\mathrm{P})\,dv + \iint_s \left(\mathrm{P}\frac{d\mathrm{Q}}{dn} - \mathrm{Q}\frac{d\mathrm{P}}{dn}\right)d\sigma = 0.$$

Cette formule très importante a reçu le nom de *formule de* GREEN : il résulte des considérations précédentes que cette formule a un caractère invariant.

Indiquons encore, avec le rotationnel et la divergence, quelques notions connexes à la théorie des champs vectoriels.

Considérons une portion finie de surface $\Sigma$, ayant deux côtés distincts, et appartenant à une région de l'espace où l'on a défini un champ vectoriel continu, dérivable et uniforme. Soit **N** le vecteur unité de la normale relative à un côté déterminé. Si **V**(M) désigne le vecteur du champ au point M, on appelle *flux* du vecteur **V** à travers la surface $\Sigma$ dans le sens de **N** l'intégrale

$$\iint_\Sigma \mathbf{V}(\mathrm{M})\,.\,\mathbf{N}\,d\sigma.$$

La formule d'Ostrogradsky fait immédiatement connaître une relation entre le flux du vecteur à travers une surface fermée $\Sigma$ et la divergence du vecteur à l'intérieur du volume limité par cette surface.

On voit en particulier que le flux du vecteur **V** est nul si la surface $\Sigma$ est tangente en chaque point au champ vectoriel. Réciproquement si le flux de **V** à travers une portion *quelconque* de la surface est nul, on a nécessairement $\mathbf{V}\,.\,\mathbf{N} = 0$, et par suite la surface est tangente en chaque point au champ vectoriel.

Soit enfin, toujours dans le même champ vectoriel, un contour fermé, C, supposé orienté. Nous appellerons *circulation* du vecteur **V** (ou circulation du champ) le long du contour C l'intégrale

$$\int_\mathrm{C} \mathbf{V}\,.\,d\mathbf{M},$$

M désignant un point variable du contour. La formule de Stokes

$$\int_C \mathbf{V}.d\mathbf{M} = \int\int_\Sigma \mathrm{rot}\,\mathbf{V}.\mathbf{N}d\sigma$$

exprime alors que la circulation du champ le long du contour fermé est égale au flux du rotationnel à travers la surface $\Sigma$ dans le sens de **N**.

## § VI. — Sur la théorie des groupes continus de transformations.

**251.** Nous considérerons exclusivement, dans tout ce qui suit, des fonctions et des variables du domaine réel, et nous supposerons satisfaites, sans chercher à les préciser, les conditions d'uniformité, de continuité et de dérivabilité nécessaires à la validité de nos raisonnements. Notre but est simplement de donner, en faisant largement appel à l'intuition, quelques aperçus sur la théorie des *groupes continus de transformations*, théorie extrêmement féconde et compréhensive, à laquelle reste attaché le nom de Sophus Lie.

Soient

(1) $$x' = f(x, y), \qquad y' = \varphi(x, y)$$

les équations d'une transformation ponctuelle plane. Nous écrirons toujours au second membre, dans les équations de cette forme, les coordonnées du point qu'il s'agit de transformer. Nous supposerons d'ailleurs essentiellement que les équations (1) sont résolubles par rapport à $x$ et $y$, autrement dit que le déterminant fonctionnel $\frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)}$ n'est pas nul. Enfin nous dirons que la transformation (1) fait passer du point arbitraire $M(x, y)$ au point $M'(x', y')$, et nous écrirons, en désignant cette transformation par T,

$$TM = M'.$$

Soient

(2) $$x'' = f_1(x', y'), \qquad y'' = \varphi_1(x', y')$$

les équations d'une seconde transformation ponctuelle $T_1$ qui fait passer du point $M'(x', y')$ au point $M''(x'', y'')$. Éliminons $x'$, $y'$ entre les équations (1) et (2); nous aurons

$$x'' = f_1[f(x, y), \varphi(x, y)], \qquad y'' = \varphi_1[f(x, y), \varphi(x, y)].$$

Ce sont les équations d'une nouvelle transformation ponctuelle, $T_2$, qui fait passer du point arbitraire $M(x, y)$ au point $M''(x'', y'')$ : on dit que $T_2$ est le produit de T et $T_1$, et l'on écrit

$$T_2 = T_1T;$$

par suite

$$M'' = T_1M' = T_1TM.$$

Remarquons que l'on n'a pas ordinairement

$$T_1T = TT_1;$$

il est facile de s'en assurer sur des exemples. Quand cette relation est vérifiée, on dit que les transformations T et $T_1$ sont *permutables*.

En particulier, supposons que les équations (2) fassent passer du point $(x', y')$ au point $(x, y)$; on dit que les transformations T et $T_1$ sont *inverses* l'une de l'autre, et l'on écrit

$$T_1 T = 1, \qquad \text{ou} \qquad T_1 = T^{-1}.$$

La transformation $T^{-1}T$, produit de deux transformations inverses, est appelée *transformation identique* : elle laisse invariants tous les points du plan.

Il est facile de déduire des équations (1) de la transformation T les équations de la transformation inverse. Résolvons ces équations par rapport à $x$ et $y$; on aura par exemple

$$x = f_0(x', y'), \qquad y = \varphi_0(x', y');$$

la transformation

$$(3) \qquad x' = f_0(x, y), \qquad y' = \varphi_0(x, y)$$

est l'inverse de la transformation T. En effet, supposons que la transformation (1) fasse passer du point $(a, b)$ au point $(\alpha, \beta)$; on aura successivement

$$\alpha = f(a, b), \qquad \beta = \varphi(a, b),$$
$$a = f_0(\alpha, \beta), \qquad b = \varphi_0(\alpha, \beta),$$

ce qui prouve que la transformation (3) fait passer du point $(\alpha, \beta)$ au point $(a, b)$.

Par exemple, soient

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \qquad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

les équations d'une transformation, $\alpha$ désignant un angle donné. Les équations de la transformation inverse s'écriront

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha;$$

l'interprétation géométrique est immédiate.

Un ensemble simplement infini de transformations sera défini par des équations telles que

$$(4) \qquad x' = f(x, y; u), \qquad y' = \varphi(x, y; u),$$

où figure un paramètre $u$; à chaque valeur de $u$ correspond une transformation bien déterminée. Nous dirons que cet ensemble forme un *groupe continu à un paramètre*, $G_1$, lorsque les deux conditions suivantes sont remplies :

1° Si les transformations $T_1$ et $T_2$ appartiennent à l'ensemble, il en est de même de leur produit $T_1T_2$.

2° La transformation identique appartient à l'ensemble.

Considérons par exemple l'ensemble de transformations

$$x' = x, \qquad y' = y + u,$$

qui définit les *translations* parallèles à l'axe des $y$. Le produit de deux translations de l'ensemble est encore une translation de l'ensemble; d'ailleurs pour $u = 0$ on a la transformation identique. Les translations considérées forment donc un groupe.

Considérons encore l'ensemble de transformations

$$x' = ux, \qquad y' = uy,$$

qui définit les homothéties ayant pour centre l'origine. On voit sans peine que ces homothéties forment un groupe, la transformation identique correspondant ici à $u = 1$.

Reprenons les équations (4)

$$x' = f(x, y\,;\, u), \qquad y' = \varphi(x, y\,;\, u).$$

Quand, laissant $x$ et $y$ fixes, on fait varier $u$, autrement dit quand on applique successivement à un point $M(x, y)$ donné toutes les transformations du groupe, on obtient une courbe $\Gamma_M$ qui est appelée *trajectoire* du groupe relative au point M. Soient M′ un point de $\Gamma_M$ distinct de M, $T_1$ la transformation du groupe qui fait passer de M à M′, T une transformation quelconque du groupe ; on aura $T_1M = M'$, puis, par exemple, $TM' = M''$, d'où $M'' = TT_1M$ ; comme la transformation $TT_1$ appartient au groupe, M″ est situé sur $\Gamma_M$, et par suite tous les points de $\Gamma_M$ ont la même trajectoire, qui est précisément $\Gamma_M$.

Il en résulte immédiatement que par tout point du plan passe en général une trajectoire et une seule : une exception ne pourra se produire que pour les points qui échappent au raisonnement précédent, savoir les points qui restent invariants pour toutes les transformations du groupe. Par exemple pour le groupe des homothéties

$$x' = ux, \qquad y' = uy,$$

l'origine est un point invariant; les trajectoires sont des droites passant par l'origine; par tout point du plan passe bien une trajectoire et une seule, exception faite de l'origine qui appartient à toutes les trajectoires.

Les équations (4), où l'on considère $x$ et $y$ comme des paramètres, définissent donc une famille simplement infinie de courbes. D'autre part le groupe admet par hypothèse la transformation identique, c'est-à-dire qu'il existe une valeur $u_0$ du paramètre $u$ telle qu'on ait identiquement

$$f(x, y\,;\, u_0) \equiv x, \qquad \varphi(x, y\,;\, u_0) \equiv y\,;$$

la courbe définie par les équations (4) passe donc au point $(x, y)$ pour la valeur $u_0$ du paramètre. Par suite les courbes (4), qui forment une famille simplement infinie telle que par tout point du plan passe une courbe de la famille et une seule, représentent l'intégrale générale d'une équation différentielle

$$\frac{dx'}{\xi(x', y')} = \frac{dy'}{\eta(x', y')}\,;$$

plus précisément les équations (4) représentent la courbe intégrale qui passe au point $(x, y)$.

On peut encore dire que les équations (4) représentent l'intégrale générale d'un système de la forme

$$\frac{dx'}{\xi(x', y')} = \frac{dy'}{\eta(x', y')} = \frac{du}{\rho(u)}.$$

Or l'intégration d'un pareil système peut être dirigée de la façon suivante. Désignons d'abord par $t$ un nouveau paramètre tel que

$$t = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\rho(u)};$$

on aura à intégrer le système

$$\frac{dx'}{\xi(x', y')} = \frac{dy'}{\eta(x', y')} = dt. \tag{5}$$

On intégrera d'abord l'équation $\xi dy' - \eta dx' = 0$ où ne figure pas $t$; soit $\theta_1(x', y') = C_1$ son intégrale générale. On en déduira $y'$, par exemple, en fonction de $C_1$ et de $x'$, et en portant cette valeur dans l'équation $dx' = \xi dt$ on aura $t$ par une quadrature, $t + C_2 = \tau(x', C_1)$; si l'on remplace, dans $\tau$, $C_1$ par $\theta_1(x', y')$, on aura donc

$$\theta_1(x', y') = C_1, \qquad \theta_2(x', y') = t + C_2.$$

On détermine $C_1$ et $C_2$ en écrivant que, pour $u = u_0$, c'est-à-dire pour $t = 0$, $x'$ et $y'$ prennent les valeurs $x$ et $y$. Finalement l'intégrale générale du système (5) s'écrit

$$\theta_1(x', y') = \theta_1(x, y), \qquad \theta_2(x', y') = \theta_2(x, y) + t. \tag{6}$$

Les équations (4) ne sont donc en somme, compte tenu de la relation entre $t$ et $u$, que les équations (6) résolues par rapport à $x'$ et $y'$. Quand on a obtenu les équations (6), on dit que le groupe est ramené à sa *forme canonique*.

On verra immédiatement sur les équations (6) que deux transformations qui correspondent à des valeurs de $t$ égales en valeur absolue et de signe contraire sont inverses l'une de l'autre. Par suite, *si une transformation* T *appartient au groupe, il en est de même de son inverse* $T^{-1}$.

Enfin il est encore visible sur les équations (6) que *deux transformations quelconques du groupe sont permutables.*

Posons

$$X = \psi_1(x, y), \qquad Y = \psi_2(x, y),$$

puis symétriquement

$$X' = \psi_1(x', y'), \qquad Y' = \psi_2(x', y').$$

On peut considérer que X et Y sont les coordonnées du point $M(x, y)$ dans un nouveau système de paramétrage où les lignes coordonnées seraient représentées par les équations

$$\psi_1(x, y) = C^{te}, \qquad \psi_2(x, y) = C^{te}.$$

Il en résulte que si nous appliquons ce changement de variables aux équations (4), les équations obtenues

$$X' = F(X, Y; u), \qquad Y' = \Phi(X, Y; u) \tag{7}$$

définiront encore un groupe de transformations, les propriétés fondamentales du groupe ayant une signification intrinsèque indépendante du paramétrage.

Deux groupes tels que (4) et (7) qui se déduisent l'un de l'autre par un changement de variables sont dits *semblables*.

En particulier, si l'on prend $X = \theta_1(x, y)$, $Y = \theta_2(x, y)$, les équations (6) s'écriront

$$X' = X, \qquad Y' = Y + t,$$

équations d'un groupe de translations. Donc *tout groupe continu à un paramètre est semblable à un groupe de translations.*

**252.** Somme toute, les équations (4) qui définissent le groupe peuvent être aussi considérées, quand on les écrit pour plus de commodité sous la forme

$$x = f(x_0, y_0; u), \qquad y = \varphi(x_0, y_0; u),$$

comme définissant l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)}.$$

On pressent dès lors le lien intime qui doit exister entre la théorie des équations différentielles et celle des groupes continus à un paramètre.

Afin de mettre cette liaison en évidence, nous allons donner de l'exposé qui précède une interprétation cinématique : pour cela il nous suffira de considérer le paramètre $t$, qui figure dans les équations (5) et (6), comme une variable représentative du temps.

Considérons alors une nappe fluide, compressible, dont toutes les particules mobiles seront supposées dans le plan des $x$, $y$, et assujettissons chaque particule à avoir au point $(x, y)$ une vitesse de composantes $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, indépendantes du temps (mouvement *permanent*). On voit, sans autre explication, que chaque particule décrit une trajectoire du groupe (4). Effectuer une transformation du groupe de paramètre $t$, c'est mettre en correspondance deux positions occupées successivement sur sa trajectoire par une molécule arbitraire : la position à l'instant $t$ et la position à l'instant initial ($t = 0$). En particulier, au déplacement de la nappe fluide dans le temps infiniment petit $dt$ à partir de l'instant initial, déplacement qui pour chaque molécule a pour composantes $\xi\,dt$, $\eta\,dt$, correspond une transformation de paramètre $dt$ : on l'appelle la *transformation infinitésimale* du groupe; elle fait passer du point $(x, y)$ au point $(x + \xi\,dt, y + \eta\,dt)$.

Pour se donner la transformation infinitésimale d'un groupe, il faut donc se donner les fonctions $\xi$, $\eta$; il est clair d'après cela que *tout groupe continu à un paramètre est entièrement déterminé par sa transformation infinitésimale.*

Considérons, à l'instant initial, les molécules situées sur une courbe quelconque $C_0$, qui ne soit pas une trajectoire du groupe. A chaque instant ultérieur $t$ ces molécules se trouveront sur une autre courbe $C_t$, déduite de $C_0$ par déformation continue, et l'ensemble de ces courbes $C_t$ forme dans le

plan $(x, y)$ une famille à un paramètre, dont on peut écrire l'équation sous la forme

$$\omega(x, y) = t.$$

Il est clair que si l'on effectue sur tous les points de la courbe $C_0$ la transformation du groupe correspondant à une valeur $t$ du paramètre, on obtiendra précisément la courbe $C_t$. Effectuons en particulier la transformation infinitésimale du groupe; elle fait passer du point $(x, y)$ au point $(x + \xi dt, y + \eta dt)$; on aura donc

$$\omega(x + \xi dt, y + \eta dt) = dt,$$

ou, en développant,

$$\omega(x, y) + \left(\xi \frac{\partial \omega}{\partial x} + \eta \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) dt = dt,$$

ou enfin, puisque $\omega(x, y) = 0$,

$$\xi \frac{\partial \omega}{\partial x} + \eta \frac{\partial \omega}{\partial y} = 1.$$

Il est évident d'autre part que si au lieu de la courbe $C_0$ on prend une autre courbe de la famille, à laquelle on applique le même procédé, on en déduira la même famille de courbes : il suffit pour s'en assurer de répéter le raisonnement que nous avons fait pour montrer que par tout point du plan passe une seule trajectoire du groupe. Nous aurons donc ainsi une famille de courbes C qui reste invariante, *dans son ensemble*, pour toutes les transformations du groupe; c'est seulement dans le cas de la famille des trajectoires que cette propriété d'invariance appartient à chaque courbe de la famille *individuellement*.

Ceci posé, considérons l'équation différentielle

$$(8) \qquad \frac{dx}{A(x, y)} = \frac{dy}{B(x, y)},$$

et supposons que nous ayons établi, par des considérations géométriques ou autres, que la famille de courbes intégrales reste invariante pour les transformations d'un groupe continu donné (4) : la vérification est d'ailleurs toujours aisée, puisqu'il suffit d'effectuer dans l'équation (8) le changement de variables (4), et de s'assurer qu'on obtient une équation

$$\frac{dx'}{A'(x', y')} = \frac{dy'}{B'(x', y')},$$

où $A'$ et $B'$ sont identiques à $A(x', y')$ et $B(x', y')$ à un même facteur près.

Reportons-nous alors à l'interprétation cinématique. Soit $C_0$ une courbe intégrale; toutes les autres s'en déduiront par application des transformations du groupe. L'intégrale générale étant mise sous la forme $\omega(x, y) = t$, on devra donc avoir

$$\xi \frac{\partial \omega}{\partial x} + \eta \frac{\partial \omega}{\partial y} = 1;$$

d'ailleurs (n° 163) $\omega(x, y)$ est une intégrale de $A\frac{\partial F}{\partial x} + B\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, on a donc aussi

$$A\frac{\partial \omega}{\partial x} + B\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0;$$

enfin on peut écrire

$$dx\frac{\partial \omega}{\partial x} + dy\frac{\partial \omega}{\partial y} = d\omega.$$

On en déduit, par élimination de $\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}$ entre les trois dernières équations,

$$d\omega = \frac{A\,dy - B\,dx}{A\eta - B\xi};$$

l'équation (8) pouvant s'écrire

$$A\,dy - B\,dx = 0,$$

on voit que l'expression $\frac{1}{A\eta - B\xi}$ est un facteur intégrant. On peut donc dire que toute équation différentielle de la forme (8), qui admet un groupe continu donné, s'intègre par des quadratures.

Considérons par exemple l'équation homogène

(9) $$dy - f\left(\frac{y}{x}\right)dx = 0;$$

il est clair que cette équation admet le groupe des homothéties

$$x' = ux, \qquad y' = uy.$$

Cherchons la transformation infinitésimale du groupe; pour $u = 1$ on a la transformation identique : la transformation infinitésimale correspond donc à $u = 1 + dt$, et l'on a alors

$$x' = x + x\,dt, \qquad y' = y + y\,dt,$$

d'où
$$\xi = x, \qquad \eta = y.$$

Dans le cas présent, $A = 1$, $B = f\left(\frac{y}{x}\right)$; on en conclut que $\left[y - xf\left(\frac{y}{x}\right)\right]^{-1}$ est un facteur intégrant pour l'équation (9), résultat qu'il est facile de vérifier directement.

Considérons, pour donner un autre exemple, l'équation

(10) $$dy - (ax^{n-2}y^2 + bx^{-n})\,dx = 0,$$

où $a$, $b$, $n$ sont des constantes quelconques; c'est une équation de Riccati. Il est facile de vérifier que cette équation admet le groupe de transformations

$$x' = ux, \qquad y' = u^{1-n}y;$$

on a ici, pour la transformation infinitésimale,

$$\xi = x, \qquad \eta = (1 - n)y,$$

et on en déduit que $[(1-n)y - ax^{n-1}y^2 - bx^{1-n}]^{-1}$ est un facteur intégrant pour l'équation (10).

On peut encore procéder d'une autre façon. Reprenons l'équation (8)

$$(8) \qquad \frac{dx}{A(x, y)} = \frac{dy}{B(x, y)},$$

et supposons que cette équation admette le groupe de transformations (4) dont les équations canoniques s'écrivent

$$\theta_1(x', y') = \theta_1(x, y), \qquad \theta_2(x', y') = \theta_2(x, y) + t.$$

Faisons, dans l'équation (8), le changement de variables

$$X = \theta_1(x, y), \qquad Y = \theta_2(x, y);$$

l'équation transformée s'écrira

$$\frac{dY}{dX} = \varphi(X, Y),$$

et elle devra admettre le groupe de transformations

$$X' = X, \qquad Y' = Y + t;$$

ceci exige évidemment que $\varphi$ ne contienne pas Y. L'intégration est donc ramenée à une quadrature.

On pourra, à titre d'exercice, appliquer cette méthode aux équations (9) et (10).

Il est aisé de l'étendre aux équations d'ordre quelconque. Observons d'abord que des équations (4), qui définissent une transformation ponctuelle, on peut déduire l'expression de $\frac{d^n y'}{dx'^n}$ en fonction de $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$; en joignant les nouvelles équations ainsi obtenues aux deux premières, on a les équations du groupe (4) *prolongé*. Supposons alors qu'une équation différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

admette ce groupe prolongé; si l'on fait le changement de variables

$$X = \theta_1(x, y), \qquad Y = \theta_2(x, y),$$

on voit comme précédemment que dans l'équation transformée

$$\Phi\left(X, Y, \frac{dY}{dX}, \ldots, \frac{d^n Y}{dX^n}\right) = 0,$$

le premier membre devra être indépendant de Y : par suite il y aura *abaissement* de l'ordre de l'équation.

On comprend dès lors la portée des recherches de Lie, et comment elles permettent de faire disparaître ce qui, à première vue, peut sembler un peu artificiel dans l'exposé des méthodes d'intégration : en réalité toute simplification dans l'intégration d'une équation différentielle d'ordre quelconque peut être rattachée à des considérations d'invariance de cette équation par rap-

port à un groupe continu donné. Nous avons par exemple indiqué (n° 161) comme cas d'abaissement celui des équations de la forme

$$F\left(x^a y, x^{a+1}\frac{dy}{dx}, \ldots, x^{a+n}\frac{d^n y}{dx^n}\right)=0,$$

où $a$ désigne une constante quelconque. Il est facile de voir que cette équation admet le groupe prolongé déduit du groupe ponctuel

$$x'=ux, \qquad y'=u^{-a}y.$$

**253.** Indiquons très brièvement deux généralisations bien distinctes des notions précédentes.

On peut d'abord, au lieu de considérer des transformations planes, considérer des transformations à un paramètre dans l'espace à $n$ dimensions; elles sont définies par des équations de la forme

$$x'_1=f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u), \ \ldots, \ x'_n=f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u).$$

On dit encore que les transformations ci-dessus forment un groupe lorsque leur ensemble contient la transformation identique, et que de plus le produit de deux transformations de l'ensemble appartient à l'ensemble. Il est facile de voir que les équations d'un groupe prolongé dans le plan $(x, y)$ sont un cas particulier des équations ci-dessus.

Tous les résultats obtenus s'étendent sans modification aux groupes continus à un paramètre de l'espace à $n$ dimensions; en particulier on peut toujours mettre les équations de ce groupe sous la forme

$$\theta_1(x'_1, \ldots, x'_n)=\theta_1(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ \theta_{n-1}(x'_1 \ldots, x'_n)=\theta_{n-1}(x_1, \ldots, x_n),$$
$$\theta_n(x'_1, \ldots, x'_n)=\theta_n(x_1, \ldots, x_n)+t.$$

On en déduit qu'un tel groupe est semblable à un groupe de translations; que si le groupe contient une transformation T il contient aussi son inverse $T^{-1}$; que deux transformations quelconques du groupe sont permutables; enfin que le groupe contient une transformation infinitésimale qui le détermine complètement.

Dans l'intégration du système

$$(11) \qquad \frac{dx_1}{A_1(x_1, \ldots, x_n)}=\frac{dx_2}{A_2(x_1, \ldots, x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{A_n(x_1, \ldots, x_n)},$$

la théorie des groupes à un paramètre de l'espace à $n$ dimensions joue un rôle analogue à celui de la théorie des groupes à un paramètre dans le plan. Contentons-nous d'indiquer en particulier que si l'on connaît, pour le système (11), $n-1$ transformations infinitésimales distinctes, on peut en général en déduire un multiplicateur du système.

On peut ici encore utiliser la forme canonique des équations du groupe pour simplifier l'intégration par un changement de variables convenablement

choisi. Considérons, en nous plaçant dans l'espace à trois dimensions, le système

$$(12) \qquad \frac{dx}{A(x, y, z)} = \frac{dy}{B(x, y, z)} = \frac{dz}{C(x, y, z)},$$

et supposons que ce système admette un groupe continu dont les équations canoniques s'écrivent

$$\theta_1(x', y', z') = \theta_1(x, y, z), \quad \theta_2(x', y', z') = \theta_2(x, y, z), \quad \theta_3(x', y', z') = \theta_3(x, y, z) + t.$$

Au moyen du changement de variables

$$X = \theta_1(x, y, z), \qquad Y = \theta_2(x, y, z), \qquad Z = \theta_3(x, y, z),$$

on met le système (12) sous la forme

$$\frac{dY}{dX} = \varphi_1(X, Y, Z), \qquad \frac{dZ}{dX} = \varphi_2(X, Y, Z);$$

ce nouveau système devant admettre le groupe

$$X' = X, \qquad Y' = Y, \qquad Z' = Z + t,$$

les fonctions $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont indépendantes de Z. L'intégration du système proposé est donc ramenée à celle d'une équation différentielle ordinaire suivie d'une quadrature.

On pourra appliquer cette méthode au système

$$\frac{dx}{x^2 + y^2 + yz} = \frac{dy}{x^2 + y^2 - xz} = \frac{dz}{xz + yz},$$

qui admet évidemment le groupe des homothéties

$$x' = ux, \qquad y' = uy, \qquad z' = uz.$$

On obtiendra une généralisation d'un autre genre en considérant des *groupes à plusieurs paramètres*. On voit rapidement apparaître des différences assez profondes entre la théorie de ces groupes et celle des groupes à un paramètre; nous ne pouvons songer ici à donner même une simple esquisse de la théorie générale des groupes continus, aussi nous contenterons-nous de signaler quelques points intéressants.

En premier lieu, *un groupe à r paramètres admet r transformations infinitésimales*. Considérons par exemple dans le plan $(x, y)$ le *groupe des déplacements*

$$(13) \qquad x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha + a, \qquad y' = x \sin\alpha + y \cos\alpha + b;$$

c'est un groupe à trois paramètres $\alpha$, $a$, $b$. On a la transformation identique en prenant $\alpha = 0$, $a = 0$, $b = 0$; posant alors

$$\alpha = du, \qquad a = dv, \qquad b = dw,$$

on aura, en ne conservant comme d'habitude que les infiniment petits du premier ordre,

$$x' = x - y\,du + dv, \qquad y' = x\,du + y + dw.$$

On en déduit que le groupe (13) admet les trois transformations infinitésimales

$$\xi_1 = -y, \ \eta_1 = x, \qquad \xi_2 = 1, \ \eta_2 = 0, \qquad \xi_3 = 0, \ \eta_3 = 1,$$

correspondant aux trois différentielles $du$, $dv$, $dw$.

Nous n'aborderons pas le problème de la génération d'un groupe au moyen de ses transformations infinitésimales. Indiquons seulement que *le groupe est complètement déterminé par ses transformations infinitésimales*, mais que, inversement, *r transformations infinitésimales prises au hasard ne déterminent pas un groupe à r paramètres.*

Remarquons ensuite que *deux transformations quelconques d'un groupe à plusieurs paramètres ne sont pas en général permutables*; il est facile de s'en assurer sur le groupe (13). Il y a là une particularité qui différencie nettement les groupes à un paramètre dans l'ensemble des groupes continus; une conséquence immédiate est qu'*un groupe à plusieurs paramètres n'est pas en général semblable à un groupe de translations*

$$x'_1 = x_1 + t_1, \quad x'_2 = x_2 + t_2, \ \ldots, \quad x'_r = x_r + t_r, \quad x'_{r+1} = x_{r+1}, \ \ldots, \quad x'_n = x_n.$$

Enfin, en nous bornant à l'espace à trois dimensions, faisons observer que l'intégration d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$(14) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

peut être simplifiée quand on sait que cette équation admet un groupe à deux paramètres *semblable à un groupe de translations* [1]. On peut en effet pour un tel groupe obtenir des équations canoniques de la forme

$$\theta_1(x', y', z') = \theta_1(x, y, z) + t_1, \quad \theta_2(x', y', z') = \theta_2(x, y, z) + t_2, \quad \theta_3(x', y', z') = \theta_3(x, y, z);$$

faisant alors dans l'équation (14) le changement de variables

$$X = \theta_1(x, y, z), \qquad Y = \theta_2(x, y, z), \qquad Z = \theta_3(x, y, z),$$

on voit que l'équation transformée

$$\Phi(X, Y, Z, P, Q) = 0$$

doit admettre le groupe

$$X' = X + t_1, \qquad Y' = Y + t_2, \qquad Z' = Z,$$

équations d'où l'on tire

$$P' = P, \qquad Q' = Q;$$

autrement dit la fonction $\Phi$ est indépendante de X et de Y, et l'on verra plus tard qu'il en résulte des simplifications importantes pour l'intégration.

Ici encore toutes les simplifications qui se présentent dans l'intégration d'une équation telle que (14) peuvent être rattachées à des considérations d'invariance.

---

(1) On en sera averti en général par des considérations géométriques tirées de la nature même du problème qui aura conduit à l'équation (14).

# EXERCICES SUR LE LIVRE IV

**1.** Soit la courbe

$$x = 6t + 6t^2 + 2t^3, \qquad y = 2 + 2t^3, \qquad z = -3 - 6t;$$

l'arc de la courbe s'exprime rationnellement en $t$ par la formule

$$ds = 6\sqrt{2}(1 + t + t^2)\,dt.$$

Les coordonnées d'un point quelconque de l'indicatrice des courbures s'expriment aussi rationnellement en $t$. L'arc $\sigma$ de cette indicatrice s'obtient par la formule

$$d\sigma = \frac{dt}{1 + t + t^2}.$$

Calculer les cosinus directeurs $(\alpha, \beta, \gamma)$ de la tangente, ceux de la normale principale, les rayons de courbure et de torsion. Vérifier la relation

$$\alpha + \beta - \gamma = \sqrt{2}.$$

(*Rennes, épr. prat.*)

**2.** On appelle $s$ l'arc d'une courbe (C); $(x, y, z)$ les coordonnées, par rapport à un trièdre trirectangle donné $Oxyz$, d'un point courant M de la courbe (C); $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les cosinus directeurs de la tangente en M, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ et $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ ceux de la normale principale et de la binormale; R et T les rayons de courbure et de torsion (R essentiellement positif, T positif ou négatif donné par les relations $\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}$, ...).

Si l'on a la relation $R = T$, on a aussi les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &\alpha - \alpha'' = A, \qquad A\alpha + B\beta + C\gamma = 1, \\ &\beta - \beta'' = B, \qquad A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' = -1, \\ &\gamma - \gamma'' = C, \end{aligned}$$

A, B et C étant des constantes liées par la relation

$$A^2 + B^2 + C^2 = 2.$$

Déduire de là que la courbe est une hélice tracée sur un cylindre dont les génératrices ont pour paramètres directeurs A, B, C.

En choisissant convenablement l'axe $Oz$, on pourra supposer

$$A = B = 0, \qquad C = \sqrt{2},$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \gamma'' = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\alpha' = \beta\sqrt{2}, \qquad \beta' = -\alpha\sqrt{2}, \qquad \gamma' = 0.$$

Si l'on donne, outre $R = T$, la relation $R = s$, on achèvera la détermination de la courbe (C) en posant

$$\alpha = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}}, \qquad \beta = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}},$$

et l'on exprimera successivement $s$, $x$, $y$ et $z$ au moyen de la variable $\varphi$.

(*Rennes, épr. écr., 2ᵉ quest.*)

**3.** On donne, en axes rectangulaires, l'expression des coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point quelconque M d'une courbe C en fonction de l'arc $s$ de cette courbe; MT est la tangente dans le sens des arcs croissants, MN la normale principale orientée de M vers le centre de courbure, MB la binormale orientée de sorte que le trièdre MTNB ait même disposition que le trièdre de coordonnées $Oxyz$.

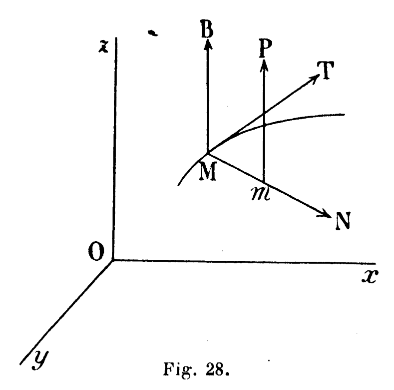


Fig. 28.

Dans le plan normal en M à la courbe C on mène une parallèle à la binormale, définie par la valeur $l$ du segment $Mm$, $m$ désignant le point où elle perce MN. On suppose que $l$ est une fonction connue de $s$, de sorte que cette parallèle engendre une surface réglée $\Sigma$. On définit un point P de la génératrice par le segment $mP = u$.

1° Équation par rapport aux axes $Oxyz$ du plan tangent à $\Sigma$ en P.

2° Il suffira de supposer que le trièdre $Oxyz$ coïncide avec le trièdre de Serret relatif au point particulier M pour déduire de ce qui précède l'équation du même plan tangent par rapport au trièdre MTNB, qui est

$$\left(l' + \frac{u}{T}\right)X - \left(1 - \frac{l}{R}\right)(Y - l) = 0,$$

R et T désignant les rayons de courbure et de torsion, et $l'$ la dérivée $\frac{dl}{ds}$.

3° Quelle fonction de $s$ faut-il prendre pour $l$ pour que la surface $\Sigma$ soit développable? Plan tangent à la surface développable, arête de rebroussement de cette surface.

(*Rennes, épr. écr., 2e quest.*)

**4.** La ligne de striction de la surface réglée engendrée par les normales principales à une courbe gauche $\Gamma$ est toujours distincte de $\Gamma$.

La ligne de striction de la surface réglée engendrée par les binormales à une courbe gauche $\Gamma$ est la courbe $\Gamma$ elle-même, et le paramètre de distribution relatif à la normale principale en un point de $\Gamma$ est égal au rayon de torsion en ce point.

**5.** Enveloppe d'une famille de cercles à un paramètre; étudier les relations entre l'enveloppe et le lieu des centres; cas particulier où les cercles passent par un point fixe O et déterminent sur une sécante fixe une corde qui est vue du point O sous un angle constant.

**6.** Enveloppe des axes, lieu des foyers et enveloppe des directrices des paraboles osculatrices à une spirale logarithmique.

**7.** Soient $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ une équation différentielle du premier ordre, $F(x, y) = C$ son intégrale générale. Démontrer que, pour que les courbes intégrales forment un système de courbes parallèles, il faut que la fonction F vérifie une relation de la forme

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = \varphi(F).$$

En déduire qu'on peut intégrer par une quadrature toute équation différentielle du premier ordre dont les courbes intégrales forment un système de courbes parallèles.

**8.** Pour que les courbes intégrales de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ forment un système isotherme, il faut et il suffit que la fonction $f$ vérifie une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre. Former cette équation et, la supposant vérifiée, en déduire un facteur intégrant pour la proposée. Application à l'équation

$$(x \cos y + y \sin y)dx + (x \sin y - y \cos y)dy = 0.$$

(Demartres.)

**9.** Deux courbes $(C_1)$ et $(C_2)$ se correspondent point par point de telle sorte que les tangentes en deux points correspondants $M_1$ et $M_2$ soient parallèles; la première a une courbure constante égale à $\frac{1}{a}$ et la seconde une torsion constante égale aussi à $\frac{1}{a}$. Démontrer que le lieu du point M qui divise dans un rapport constant le segment $M_1M_2$ est une courbe de Bertrand.

(BIOCHE.)

**10.** Une ligne à courbure constante et le lieu de son centre de courbure forment deux courbes de Bertrand associées. Le produit des torsions en deux points associés est constant.

**11.** Démontrer que l'hélicoïde gauche lieu des normales principales d'une hélice circulaire est la seule surface réglée minima.

**12.** Une courbe gauche est définie par l'ensemble de ses plans osculateurs dont l'équation est mise sous la forme

$$x \sin t - y \cos t + \mu z = H,$$

$\mu$ et H étant des fonctions de $t$. Déterminer les coordonnées du centre et le rayon de la sphère osculatrice. Quelle relation doit-il y avoir entre $\mu$ et H pour que la courbe considérée soit une courbe de Bertrand?

(DEMARTRES.)

**13.** On considère la courbe définie en coordonnées rectangulaires par les équations

$$x = \int_{t_0}^{t} \frac{\cos t\, dt}{(1 - a \cos t)^2}, \qquad y = \int_{t_0}^{t} \frac{\sin t\, dt}{(1 - a \cos t)^2}, \qquad z = a \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{(1 - a \cos t)^2}.$$

Démontrer que cette courbe est une hélice tracée sur un cylindre du second degré, et que ses normales principales rencontrent une droite fixe.

**14.** Déterminer les surfaces réglées qui ont pour ligne de striction une courbe donnée.

**15.** Étant donnée une courbe gauche (C), on mène en un point M de cette courbe la tangente $M\xi$, la normale principale $M\eta$ et la binormale $M\zeta$. Soient MD la bissectrice de l'angle $\xi M \zeta$ et (S) la surface engendrée par MD quand M parcourt (C). On prend sur MD un point P défini par $MP = u\sqrt{2}$, former l'équation du plan tangent en P à (S), rapportée aux axes $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$ et en déduire à quelle condition la surface (S) sera développable. La courbe (C) est, dans ce cas, une hélice; montrer que la surface (S) est alors le cylindre sur lequel est tracée cette hélice.

Dans le cas général où (S) n'est pas développable, former l'équation de Riccati donnant ses lignes asymptotiques non rectilignes.

(*Bordeaux, épr. th.*, 2^e^ *quest.*)

**16.** On donne une courbe gauche (C) pour laquelle les coordonnées d'un de ses points M sont des fonctions connues de l'arc AM de la courbe, compté à partir d'un point fixe A de la courbe. On mène en M, à la courbe (C), la tangente $M\xi$, la normale principale $M\eta$ et la binormale $M\zeta$ dans les sens habituels. Soit $u$ une fonction déterminée de l'arc AM. On mène la droite MD dont les paramètres directeurs par rapport à $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$ sont $(1, 1, u)$. Cette droite MD engendre une surface réglée $(\Sigma)$ lorsque le point M se déplace sur la courbe (C). On demande :

1° Comment on doit choisir la fonction $u$ pour que la courbe (C) soit ligne de striction pour la surface $\Sigma$. On montrera que la solution de cette question s'obtient par quadratures.

2° Comment on doit choisir la fonction $u$ pour que la surface $(\Sigma)$ soit développable. On montrera que la solution de cette question dépend d'une équation de Riccati. Peut-on intégrer cette équation lorsque la courbe (C) est une hélice quelconque?

(*Bordeaux, épr. th.*, 2^e^ *quest.*)

**17.** On donne en coordonnées rectangulaires une surface réglée (S) ayant pour équations

$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta, \qquad z = V + \rho W,$$

$\rho$ et $\theta$ étant deux paramètres indépendants et V, W deux fonctions données du seul paramètre $\theta$. On demande :

1° de former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de cette surface et de montrer qu'elle s'intègre par quadrature;

2° comment il faut choisir la fonction W pour que les lignes asymptotiques, autres que les génératrices, se projettent sur le plan des $xy$ suivant des courbes homothétiques entre elles par rapport à l'origine des coordonnées. Montrer que la surface S est, dans ce cas, un conoïde. Pouvait-on prévoir géométriquement ce résultat?

(*Bordeaux, épr. th.*, 2° *quest.*)

**18**. On considère la surface définie par les équations

$$x = u + (v-1)\sin u, \qquad y = 1 + (v-1)\cos u, \qquad z = a\left(\frac{u^2}{2} + v\right),$$

où $a$ est une constante, et $u$ et $v$ deux paramètres variables.

1° Trouver toutes les courbes de l'espace dont les tangentes sont parallèles aux droites de la surface. (On se contentera d'exprimer les coordonnées courantes d'un point de la courbe sous forme d'intégrales renfermant une fonction arbitraire.) Déterminer en particulier celles dont le rayon de courbure est constant.

2° Trouver les courbes trajectoires orthogonales des droites de la surface.

3° Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques et montrer que son intégration peut se ramener à une quadrature.

(*Grenoble, épr. th.*, 1^re^ *quest.*)

**19**. Deux courbes C, Γ se correspondent point par point de manière que les tangentes aux points correspondants M, μ soient parallèles. Soient $C_1$, $\Gamma_1$ deux courbes rencontrant respectivement toutes les tangentes à C, Γ; soient $M_1$, $\mu_1$ les points où ces courbes rencontrent respectivement deux tangentes correspondantes quelconques MT, μτ de C, Γ.

Montrer qu'étant donnée $C_1$ on peut choisir $\Gamma_1$ de manière que sa tangente en tout point $\mu_1$ soit parallèle à la tangente à $C_1$ au point correspondant $M_1$; les courbes $\Gamma_1$ qui jouissent de cette propriété forment une famille dépendant d'un paramètre arbitraire.

On peut définir $C_1$ par la donnée, en fonction de l'abscisse curviligne $s$ du point M, de la longueur $l$ du vecteur $MM_1$ porté sur la tangente MT à la courbe C; soit $s_1$ l'abscisse curviligne de $M_1$ sur $C_1$. Soient $\sigma$, $\lambda$, $\sigma_1$ les quantités analogues relatives à Γ, $\Gamma_1$.

Montrer que l'on a

$$\frac{ds + dl}{ds_1} = \frac{d\sigma + d\lambda}{d\sigma_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{ds_1}{l} = \frac{d\sigma_1}{\lambda}.$$

Examiner le cas particulier où $C_1$ coupe orthogonalement toutes les tangentes MT et où Γ se réduit à un point.

(*Grenoble, épr. th.*, 2° *quest.*)

**20**. On considère le point dont les coordonnées rectangulaires sont

$$(1) \qquad x = A + \rho\frac{\partial A}{\partial v}, \qquad y = B + \rho\frac{\partial B}{\partial v}, \qquad z = C + \rho\frac{\partial C}{\partial v},$$

dans lesquelles on a posé

$$A = \frac{\sin u \sin v}{\sqrt{2}} + \cos u \cos v, \qquad B = \frac{\cos u \sin v}{\sqrt{2}} - \sin u \cos v, \qquad C = \frac{\sin v}{\sqrt{2}}.$$

Lorsque $\rho$ varie seul, ce point décrit une droite $\Delta(u, v)$ qui, quand $u$ et $v$ varient, engendre une congruence G qu'on se propose d'étudier.

1° Vérifier que la congruence G est formée par les tangentes communes à la sphère S obtenue en faisant $\rho = 0$ dans les formules (1) et au cône T obtenu en faisant $\rho = \cot v$ dans les mêmes formules. Trouver les développables dont les génératrices appartiennent à G et démontrer que les arêtes de rebroussement de ces surfaces qui sont sur T se transforment en les différentes tangentes d'une même circonférence dans le développement du cône T sur un plan.

2° Démontrer qu'il existe des surfaces Σ qui admettent pour normales toutes les droites de G; trouver ces surfaces. Déterminer les lignes de courbure des surfaces Σ; montrer qu'une famille est plane et l'autre sphérique. Que pouvez-vous dire des développées de ces lignes de courbure?

(*Paris, épr. écr.*, 1^re^ *quest.*)

**21.** On considère la congruence de cercles

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - (b - a^2)a^2 y - b = 0,$$
$$x + 2(b - a^2)ay + 2a = 0.$$

Déterminer $b$ en fonction de $a$ de façon que la surface engendrée par les cercles C de la famille ainsi constituée admette ces cercles C comme lignes de courbure.

(*Bordeaux, épr. écr.*, 2ᵉ *quest.*)

**22.** Un point $m$, de coordonnées $x, y, z$, décrit une courbe gauche $(\gamma)$ dont on appelle $s$ l'arc, $r$ le rayon de courbure, $t$ le rayon de torsion, $(a, b, c)$, $(a', b', c')$ et $(a'', b'', c'')$ les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale. On considère la courbe dite *adjointe* $(\gamma_0)$ décrite par le point $m_0$

$$x_0 = \int a''ds, \quad y_0 = \int b''ds, \quad z_0 = \int c''ds,$$

et les courbes dites associées, $(\Gamma)$, définies par les équations

$$X = x\cos\theta + x_0 \sin\theta, \qquad Y = y\cos\theta + y_0\sin\theta, \qquad Z = z\cos\theta + z_0\sin\theta,$$

où $\theta$ est une constante.

On désigne par les grandes lettres S, R, T, A, B, ..., C'' les éléments de la courbe $(\Gamma)$ analogues aux éléments de la courbe $(\gamma)$ représentés par la même petite lettre.

1° Trouver le trièdre de Serret-Frenet relatif à la courbe associée. Dispositions de ce trièdre par rapport au trièdre de la courbe donnée. Longueur des arcs correspondants sur $(\gamma)$ et $(\Gamma)$.

2° Rayons de courbure et de torsion de la courbe $(\Gamma)$.

3° Montrer que si $(\Gamma)$ est une courbe associée à $(\gamma)$, inversement $(\gamma)$ est l'une des courbes associées à $\Gamma$.

4° Pour $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, la courbe $\Gamma$ se réduit à $(\gamma)$ ou à $(\gamma_0)$.

Montrer que si $(\gamma)$ a son rayon de courbure constant, $(\gamma_0)$ a son rayon de torsion constant. Dans ce cas les courbes $(\Gamma)$ sont dites *courbes de* Bertrand (relation linéaire entre les deux courbures $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{T}$).

(*Rennes, Géom. sup., épr. écr.*)

**23.** Deux surfaces développables sont applicables l'une sur l'autre lorsque, sur leurs deux arêtes de rebroussement, la courbure est une même fonction de l'arc.

**24.** Les normales à une surface réglée aux différents points d'une même génératrice forment un paraboloïde hyperbolique.

**25.** Si une géodésique d'une surface réglée coupe sous un angle constant les génératrices, elle se confond avec la ligne de striction; si la ligne de striction est une géodésique, elle coupe sous un angle constant les génératrices; enfin si la ligne de striction coupe sous un angle constant les génératrices, elle est aussi une ligne géodésique.

(O. Bonnet.)

**26.** On considère les hyperboloïdes de révolution à une nappe représentés par l'équation

$$\frac{x^2}{a+t} + \frac{y^2+z^2}{b+t} = 1,$$

$a$ et $b$ étant des constantes et $t$ un paramètre variable.

1° Former l'élément linéaire de la surface réglée engendrée par celles des génératrices rectilignes qui rencontrent l'axe des $z$.

2° Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface.

(*Paris, épreuve théorique.*)

**27.** On considère, sur une surface S, d'une part les courbes C enveloppées par des plans normaux à S et parallèles à une direction donnée D, d'autre part les courbes $C_1$ telles que la normale à la surface le long de chacune d'elles fait un angle constant avec la même direction. Démontrer que si ces deux familles de courbes forment un réseau orthogonal, la surface a un système de lignes de courbure situées dans des plans perpendiculaires à D.

(Lucien Lévy.)

**28.** Les droites qui ont pour équations

$$\frac{x - u\sin v}{\sin v} = \frac{y - u\sin v}{-\sin v} = \frac{az}{u},$$

où $a$ est une constante, $u$ et $v$ deux paramètres variables forment une congruence. Étudier cette congruence, et en particulier démontrer que la surface focale se compose de deux paraboloïdes de révolution égaux.

**29.** Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires $Ox$, $Oy$, $Oz$, on considère dans le plan des $xy$ la parabole qui a pour équation $y^2 = 2p(x - b)$.

1° Former l'équation de la surface E enveloppe d'une sphère $\Sigma$ variable, passant par l'origine, et dont le centre décrit cette parabole; étudier la section de E par le plan $xOy$, et la surface E′ obtenue en transformant E par une inversion d'origine O et de module $p^2$.

2° Soit S une sphère tangente à l'origine au plan $xOy$; démontrer que le cercle suivant lequel la sphère $\Sigma$ touche son enveloppe est orthogonal à S, et que toute sphère telle que S coupe la surface E à angle droit en tous les points de leur intersection; déterminer les lignes de courbure de E.

3° Dans quel cas les deux familles de lignes de courbure de E se composent-elles de cercles? Déterminer, dans ce cas, la deuxième famille de sphères dont E est l'enveloppe, et trouver le lieu des centres de ces sphères.

(*Nancy, épreuve théorique.*)

**30.** Trouver en projection sur le plan $yOz$ les lignes asymptotiques de la surface

$$x + y^2 z = \int_0^y (y - t)e^{-\sqrt{t}}\,dt.$$

Parmi ces courbes projetées, montrer qu'il y en a une et une seule délimitant avec $Oy$ et le prolongement de $Oz$ une région d'aire finie. Évaluer cette aire.

(*Poitiers, épr. prat.*)

**31.** On assimile la terre à un ellipsoïde de révolution, dont les rayons de courbure principaux en un point sont $R_1$ et $R_2$. Évaluer la partie principale de l'intégrale

$$\iint \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 dS$$

étendue à toute la surface du globe, en supposant très petit l'aplatissement $\varepsilon = 1 - \frac{b}{a}$.

Application : $\varepsilon = \frac{1}{300}$. Degré d'approximation.

(*Poitiers, épr. prat.*)

**32.** Soit S la surface définie en coordonnées rectangulaires par les équations paramétriques

$$x = u\cos v + \sin^2 v, \qquad y = u\sin v - \frac{1}{2}\sin 2v - v, \qquad z = \varphi(u, v).$$

On demande de trouver l'expression la plus générale de la fonction $\varphi(u, v)$ pour chacun des trois cas suivants :

1° pour que les deux familles de courbes $u = C^{te}$, $v = C^{te}$ soient orthogonales sur la surface S;

2° pour que ces deux familles de courbes soient conjuguées sur la surface S;

3° pour qu'elles soient les lignes de courbure de S.

(*Bordeaux, épr. th., 2e quest.*)

**33.** On désigne par S une surface réglée dont les génératrices font un angle donné $\theta$ avec une direction donnée $\Delta$. Les axes $Oxyz$ sont rectangulaires et $\Delta$ parallèle à $Oz$.

1° Appelons $S_1$ toute surface S développable. Dire quelle est la nature de l'arête de rebroussement de $S_1$ : en déduire le moyen d'engendrer toutes les surfaces $S_1$. Montrer qu'en un point quelconque d'une surface $S_1$ le plan tangent à la surface fait l'angle $\theta$ avec $\Delta$. Réciproque.

2° Appelons $S_2$ la surface S dont les génératrices rencontrent $Oz$ et une hélice circulaire d'axe $Oz$. Déterminer les lignes asymptotiques de $S_2$ et indiquer leur forme. Montrer *a priori* que la recherche de ces lignes se ramène au plus à une seule quadrature.

(*Rennes, épr. écr.*, 2^e^ *quest.*)

**34**. Le plan qui a pour équation

$$2t^2x + 2ty + z = 4f(t),$$

$f(t)$ étant une fonction donnée du paramètre $t$, enveloppe une surface développable S.

1° Montrer que l'arête de rebroussement de S est une hélice. Calculer les rayons de courbure et de torsion en chaque point de cette hélice.

2° Ramener à une quadrature la recherche des lignes de courbure de S et donner des équations paramétriques de ces lignes.

(*Rennes, épr. écr.*, 1^re^ *quest.*)

**35**. On considère la surface S définie par les équations

$$x = 6\rho^2 \cos 2\varphi - 3\rho^4 \cos 4\varphi, \qquad y = -6\rho^2 \sin 2\varphi - 3\rho^4 \sin 4\varphi, \qquad z = 8\rho^3 \cos 3\varphi.$$

1° Former l'équation du plan tangent; calculer les rayons de courbure principaux.

2° Former les équations paramétriques de la développée; montrer que les deux nappes, qui peuvent être représentées par un même système d'équations, sont unicursales.

3° Lignes de courbure et lignes asymptotiques de S.

4° Montrer qu'on a une représentation conforme de S sur un plan en regardant $\rho$ et $\varphi$ comme les coordonnées polaires du plan. Construire alors les représentations planes des lignes de courbure, et dire ce qu'elles offrent de particulier. Comment déduit-on sans calcul les représentations planes des asymptotiques de celles des lignes de courbure?

(*Rennes, géom. sup., épr. prat.*)

**36**. I. — On considère la surface définie en coordonnées paramétriques par les équations

$$x = 3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3, \qquad y = 3\beta + 3\alpha^2\beta - \beta^3, \qquad z = 3(\alpha^2 - \beta^2).$$

1° Trouver le degré de cette surface.

2° Déterminer ses lignes de courbure; montrer que ce sont des courbes planes unicursales du troisième degré, et qu'elles sont rectifiables.

3° Déterminer ses lignes asymptotiques; montrer que ces lignes sont à la fois des hélices et des cubiques gauches rectifiables.

4° Démontrer que la surface considérée est une surface minima. On l'appelle surface minima d'*Enneper*.

II. — On considère les deux paraboles définies par les équations

$$(P_1) \qquad x = 4t, \qquad y = 0, \qquad z = 2t^2 - 1,$$
$$(P_2) \qquad x = 0, \qquad y = 4t, \qquad z = -2t^2 + 1.$$

1° Montrer que ces paraboles sont *focales* l'une de l'autre, c'est-à-dire qu'elles sont situées dans des plans rectangulaires et que chacune a pour foyer le sommet de l'autre.

2° Soit $M_1(t = \alpha)$ un point de $(P_1)$, $M_2(t = \beta)$ un point de $(P_2)$. Écrire l'équation du plan perpendiculaire au milieu de $M_1M_2$, et déterminer l'enveloppe de ce plan quand $M_1$ et $M_2$ décrivent $(P_1)$ et $(P_2)$.

3° On retrouve pour enveloppe la surface d'Enneper. Soit $\Pi$ le plan perpendiculaire au milieu de $M_1M_2$; montrer que les plans normaux à $(P_1)$ et $(P_2)$ en $M_1$ et $M_2$ sont les plans des lignes de courbure qui passent par le point de contact de la surface d'Enneper et du plan $\Pi$.

III. — Étude de la développée de la surface d'Enneper.

1° Former les équations paramétriques des deux nappes de la développée. Vérifier ainsi que la développée se compose de deux surfaces unicursales algébriques, analytiquement distinctes, symétriques par rapport à une droite.

2° Soit $\Sigma_1$ une nappe de la développée. Déterminer les lignes asymptotiques et les lignes de courbure de $\Sigma_1$ en termes finis. Indiquer sans calcul une famille de géodésiques de $\Sigma_1$. Rayons de courbure principaux.

3° Montrer que, sur $\Sigma_1$, les courbes $\alpha = C^{te}$, $\beta = C^{te}$ forment un réseau conjugué. Cette propriété étant établie par le calcul, la démontrer géométriquement, et l'étendre à la développée d'une surface quelconque.

4° L'une des familles du réseau conjugué ($\alpha$), ($\beta$), est formée de courbes planes situées dans des plans parallèles; l'autre famille est formée des courbes de contact des cylindres circonscrits à $\Sigma_1$ ayant leurs génératrices parallèles aux plans des courbes de la première famille.

**37.** Démontrer que la seule surface minima de révolution est la surface engendrée par la révolution d'une chaînette autour de sa base. Cette surface a reçu le nom d'*alysséide*, ou de *caténoïde*.

**38.** Démontrer que le $ds^2$ d'une surface réglée réelle peut se mettre sous la forme

$$ds^2 = du^2 + [(u-\alpha)^2 + \beta^2]dv^2,$$

$\alpha$ et $\beta$ désignant des fonctions de $v$. Si $\beta = 0$, la surface est développable.

**39.** Démontrer qu'en tout point d'une surface le carré du rayon de torsion d'une ligne asymptotique est égal au produit changé de signe des rayons de courbure principaux en ce point.

**40.** On considère la surface dont l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = \left(\frac{2}{u} - \frac{1}{a}\right)(du^2 + u^2dv^2),$$

où $a$ désigne une constante positive. On demande :

1° de déterminer explicitement les lignes géodésiques de la surface;

2° si l'on fait correspondre au point de coordonnées ($u$, $v$) de la surface le point du plan qui a pour coordonnées polaires $r = u$, $\omega = v$, quelles sont les courbes du plan qui correspondent aux géodésiques de la surface;

3° de déterminer la ou les lignes géodésiques passant par les deux points ($u$, $v$) et ($u_0$, $v_0$);

4° de trouver l'enveloppe des géodésiques passant par le point ($u_0$, $v_0$).

(*Paris, épreuve théorique.*)

**41.** On considère les surfaces (S) dont l'élément linéaire a la forme

$$ds^2 = \mathrm{U}(u)(du^2 + dv^2).$$

1° Par un changement de variables $u_1 = \varphi(u)$, ramener le $ds^2$ à la forme géodésique polaire.

2° Déduire de là la courbure totale de la surface $\left(\text{qu'on exprimera au moyen de U, } \frac{d\mathrm{U}}{du}, \frac{d^2\mathrm{U}}{du^2}\right)$.

3° Choisir U pour que (S) soit à courbure totale constante.

4° Déterminer les géodésiques de (S) dans le cas où $\mathrm{U} \equiv u$.

(*Poitiers, épreuve théorique, 2° question.*)

**42.** On considère la surface définie par les équations

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = av + \sqrt{b^2-u^2} - b\,\mathrm{Log}\,\frac{b+\sqrt{b^2-u^2}}{u},$$

$a$ et $b$ étant des constantes.

1° Démontrer que les courbes $v = \mathrm{C}^{te}$ sont planes et que le plan de chacune d'elles coupe la surface sous un angle constant.

2° Montrer que la surface est applicable sur une surface de révolution; préciser le mode de correspondance.

3° Déterminer les lignes de courbure et les rayons de courbure principaux.

4° Développée de la surface; montrer que chacune des deux nappes est applicable sur une alysséide.

5° Déterminer les lignes asymptotiques, leur courbure et leur torsion.

(*Agrégation.*)

**43.** On donne un point fixe O et un plan fixe Q qui ne passe pas par O. Étudier le complexe des droites D qui rencontrent le plan Q en un point A tel que OA soit normal à D.

(PAPELIER.)

**44.** Étudier le complexe des cordes de la quadrique

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$$

qui sont vues de son centre sous un angle droit. Points pour lesquels le cône du complexe est de révolution. Plans pour lesquels la courbe du complexe est une parabole ou un cercle.

(PAPELIER.)

**45.** Dans tout complexe (non linéaire) il existe en général une congruence de droites $\Delta$ telles que le plan tangent aux cônes élémentaires relatifs aux divers points d'une de ces droites soit le même tout le long de la droite à l'exception d'un seul point P de $\Delta$. La congruence porte le nom de *congruence singulière du complexe*, la surface (pouvant d'ailleurs se réduire à une courbe) lieu du point P, le nom de *surface des singularités*. Le point P est un *point singulier* de $\Delta$, le plan associé à $\Delta$ en tous les points autres que P est un *plan singulier* : la surface des singularités est une nappe focale de la congruence singulière, les point et plan singuliers relatifs à $\Delta$ sont des éléments focaux *associés*.

On demande de *vérifier* toutes les propriétés précédentes sur le complexe (du second degré) des droites $\Delta$ par chacune desquelles passent deux plans rectangulaires tangents au paraboloïde $xy = hz$.

**46.** Rattacher la théorie du multiplicateur à celle des champs vectoriels d'après les indications suivantes.

On cherche les lignes intégrales du champ vectoriel $\mathbf{V}(M)$. La condition pour que $\rho$ soit un multiplicateur peut s'écrire $\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$. Soit $\varphi(M)$ une intégrale première ; on considère les surfaces infiniment voisines

$$(S) \quad \varphi(M) = \lambda, \qquad (S') \quad \varphi(M) = \lambda + d\lambda ;$$

on trace sur (S) un contour fermé simple ($\gamma$) et on construit le tube des normales à (S) le long de ($\gamma$). On applique le théorème d'Ostrogradsky au champ $\rho\mathbf{V}$ dans le domaine compris entre ce tube et les surfaces (S) et (S'). Montrer que, si **G** est le vecteur unitaire de la normale géodésique à ($\gamma$), *ds* l'élément d'arc de cette courbe, la quantité

$$d\psi = \mathbf{V}.\mathbf{G}\,\frac{\rho\,ds}{\sqrt{(\mathbf{grad}\,\varphi)^2}}$$

est une différentielle totale sur (S). En conclure que si l'on possède une intégrale première $\varphi(M)$ et un multiplicateur $\rho(M)$, on obtient les lignes intégrales par une quadrature : ce sont, sur les surfaces (S), les lignes $\psi = C^{te}$.

**47.** On considère l'enveloppe E de la famille de plans

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi + z\cot\theta - p(\theta, \varphi) = 0,$$

où $\varphi$ et $\theta$ sont les paramètres variables. A chaque système de valeurs de $\varphi$ et $\theta$ on fait correspondre le point de contact du plan défini par ces valeurs avec la surface.

1° Former la condition à laquelle doit satisfaire la fonction $p$ pour que les courbes $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$ soient conjuguées. Déterminer la forme générale des fonctions $p$ satisfaisant à cette condition.

2° Cette condition étant remplie, montrer que les lignes $\varphi = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ sont orthogonales. Montrer que les lignes de courbure de la surface sont planes, et que celles de l'une des familles sont égales entre elles.

3° On considère ces lignes de courbure comme les différentes positions d'une courbe mobile : quelle est la nature du déplacement de son plan? Définir les deux nappes de la développée de E ; dans quelles conditions l'une ou l'autre de ces deux nappes dégénère-t-elle en une ligne? Quelle est la nature de E lorsque les deux nappes sont ainsi dégénérées?

*Nota.* — Les candidats devront faire usage, autant que possible, de considérations géométriques.

(*Strasbourg, épr. écr., 1re quest.*)

---

# LIVRE V

# ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

par Georges BOULIGAND.

---

## CHAPITRE PREMIER

## INTRODUCTION

**254. Intervention de fonctions arbitraires dans la solution.** — On appelle *équation aux dérivées partielles d'ordre p* une relation entre les variables indépendantes, la fonction inconnue, et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $p$ inclus, une dérivée d'ordre $p$ au moins figurant effectivement dans cette relation.

Par exemple, soient $z$ une fonction inconnue des deux variables $x$, $y$ et $f(x, y)$ une fonction donnée. Alors la relation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y),$$

déjà considérée au n° 84, est une équation aux dérivées partielles du second ordre. Si l'on connaît une solution particulière $\varphi(x, y)$, toute autre solution sera de la forme

$$\varphi(x, y) + \mathrm{A}(x) + \mathrm{B}(y),$$

$\mathrm{A}(x)$ et $\mathrm{B}(y)$ désignant des fonctions dérivables, mais arbitraires. C'est là un fait général : *la solution d'une équation aux dérivées partielles dépend de fonctions arbitraires* [1]. Toutefois, la loi de cette dépendance n'est pas facile

[1] Une équation différentielle ordinaire, telle que

$$\text{(E)} \qquad \mathrm{F}\left(x,\, z,\, \frac{dz}{dx},\, \frac{d^2 z}{dx^2}\right) = 0,$$

peut toujours être regardée comme définissant une fonction $z$ de $x$ et de $n$ paramètres $y_1, \ldots, y_n$, bien que ces paramètres ne figurent pas explicitement dans l'équation. Soit $\varphi(x, \alpha, \beta)$ l'intégrale générale de (E) en tant qu'équation différentielle ordinaire. Si on regarde $z$ comme fonction inconnue de $x, y_1, \ldots, y_n$, l'équation (E) devient une équation aux dérivées partielles et sa solution est $\varphi(x, \alpha, \beta)$, où $\alpha$ et $\beta$ sont maintenant des fonctions arbitraires de $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

à résumer dans un énoncé simple, parallèle à celui d'après lequel l'intégrale générale d'une équation différentielle d'ordre $n$ dépend de $n$ constantes arbitraires.

Précisons ce point par un exemple. En disant que l'intégrale de l'équation $y''=f(x, y, y')$ dépend de deux constantes arbitraires, on veut dire qu'il faut imposer deux conditions à une solution de cette équation pour la déterminer. On donnera, pour fixer les idées, les valeurs prises par la fonction et sa dérivée première pour $x=0$, ces valeurs sont les deux constantes arbitraires de l'énoncé. Prenons maintenant l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial y};$$

une intégrale holomorphe en $x$, $y$ autour de l'origine $x=y=0$ est bien déterminée si l'on donne la fonction holomorphe $\varphi(x)$ à laquelle elle se réduit pour $y=0$ : c'est ce qu'on verra en cherchant les coefficients du développement de Mac-Laurin de l'intégrale en question, développement qu'on peut ordonner par rapport à $y$ et qui s'écrit alors

$$\varphi(x)+y\varphi''(x)+\frac{y^2}{2!}\varphi^{(4)}(x)+\ldots+\frac{y^n}{n!}\varphi^{(2n)}(x)+\ldots;$$

ici, la donnée *d'une seule fonction* $\varphi(x)$ détermine donc, bien que l'équation soit *du second ordre*, une intégrale holomorphe. En outre, cette fonction $\varphi(x)$ n'est plus une fonction analytique arbitraire : une étude plus approfondie (voir Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III, chap. XXIV) montre que la fonction $\varphi(x)$ doit être *entière*.

**255. Simplification par changement de variables : équation des cordes vibrantes.** — La théorie des équations aux dérivées partielles est un chapitre important de l'Analyse, en raison de la fréquence avec laquelle elles interviennent dans des questions diverses. Nous avons déjà rencontré l'équation de Laplace, à propos des fonctions d'une variable complexe. En Physique mathématique, les types les plus variés d'équations aux dérivées partielles se sont présentés dès les premières recherches.

L'une des plus anciennement étudiées est l'*équation des cordes vibrantes*

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

on la traite par changement de variables en posant

$$(2) \qquad u=x+at, \qquad v=x-at,$$

d'où

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}, \qquad \frac{1}{a}\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2};$$

l'équation (1) devient ainsi

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$$

et son intégrale générale est

(4) $$z = \varphi(x + at) + \psi(x - at).$$

Le problème physique est ainsi posé : on considère une corde très peu extensible tendue entre deux points $x_1$, $x_2$ de l'axe O$x$, qui sont les extrémités de la corde. On demande d'étudier dans le plan des $xz$ les petits mouvements transversaux du système autour de sa figure rectiligne d'équilibre $x_1x_2$. A l'instant $t$, la figure affectée par la corde sera une courbe représentée par l'équation

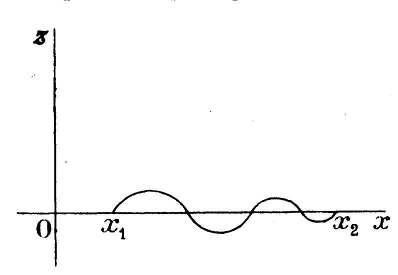


Fig. 29.

$$z = z(x, t).$$

On démontre en Physique [1] que $z$ est précisément une intégrale de l'équation (1). La présence des fonctions arbitraires $\varphi$ et $\psi$ dans (4) indique la possibilité d'une infinité de mouvements. On détermine l'un d'eux en donnant :

1° la figure déformée imposée à la corde à l'instant $t = 0$ ;

2° la répartition des vitesses animant alors les divers points de la corde.

Analytiquement, cela revient à énoncer le théorème suivant :

*Une intégrale de* (1) *est bien déterminée si l'on donne, dans l'intervalle* $(x_1, x_2)$, *les deux fonctions*

$$z(x, 0) \qquad et \qquad \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0)$$

*astreintes à s'annuler aux deux extrémités.*

Il suffit en effet de montrer qu'on peut déterminer les fonctions $\varphi$ et $\psi$ figurant dans (4) de manière à avoir

$$\varphi(x) + \psi(x) = z(x, 0),$$
$$\varphi'(x) - \psi'(x) = \frac{1}{a}\frac{\partial z}{\partial t}(x, 0);$$

la seconde équation donne $\varphi(x) - \psi(x)$ à une constante additive près, et nous aurons

$$\varphi(x) + \psi(x) = F(x),$$
$$\varphi(x) - \psi(x) = G(x) + C,$$

d'où

$$2\varphi(x) = F(x) + G(x) + C,$$
$$2\psi(x) = F(x) - G(x) - C;$$

la solution sera donc

$$z = \frac{F(x + at) + G(x + at) + C}{2} + \frac{F(x - at) - G(x - at) - C}{2};$$

naturellement, on vérifie que C disparaît du résultat final.

(1) Voir Bouligand, *Précis de Mécanique rationnelle*, tome II.

**256. Quelques méthodes de recherche.** — Les méthodes employées étant très variées, nous citerons quelques exemples assez nettement différents, par leurs principes, des considérations utilisées pour les équations du premier ordre, dont nous ferons, en dernier ressort, l'étude systématique.

On peut tirer parti de rapprochements entre les équations différentielles ou aux dérivées partielles d'une part, les équations aux différences finies d'autre part, les premières se présentant comme cas limite des secondes. Précisons d'abord cette idée dans le domaine des équations différentielles ordinaires.

L'équation différentielle

$$(5) \qquad y' = f(x, y)$$

peut être rapprochée pour $h$ très petit de l'équation

$$(6) \qquad \varphi(x+h) - \varphi(x) = hf[x, \varphi(x)],$$

dans laquelle la fonction $\varphi$, au lieu d'être définie quel que soit $x$, l'est seulement pour les valeurs de la forme $nh$, où $n$ désigne un entier quelconque, positif ou négatif. Si on donne $\varphi(0)$, l'équation (6) permet de déterminer de proche en proche les termes de la suite

$$\varphi(h), \quad \varphi(2h), \ldots, \quad \varphi(nh), \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire les ordonnées des sommets successifs d'une ligne brisée, ayant pour abscisses $h$, $2h$, ..., $nh$, ..., sommets tels que cette ligne fournisse la représentation graphique d'une solution de (6). Mais alors, à partir de ce point de vue, le fait qu'il passe par un point de l'axe O$y$ (par exemple) une courbe intégrale de l'équation (5) devient intuitif. Cette intuition ne saurait, il est vrai, se substituer à une démonstration rigoureuse, mais du moins fournit-elle le principe d'une telle démonstration, qu'on trouvera développée dans des traités plus étendus [moyennant des conditions convenables imposées à $f(x, y)$] sous le nom de *méthode de* CAUCHY-LIPSCHITZ.

**257.** De tels procédés, appliqués aux équations aux dérivées partielles, permettent également de rendre intuitifs des résultats importants. Par exemple, avant d'étudier dans le plan l'équation de LAPLACE

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

on peut considérer la question suivante.

Traçons dans le plan $x$O$y$ un réseau à mailles carrées, obtenu au moyen des droites $x = mh$, $y = nh$, où $m$ et $n$ sont deux entiers quelconques, et $h$ une longueur fixe. Cherchons une fonction définie exclusivement aux nœuds du réseau et telle que sa valeur en un nœud quelconque soit la moyenne arithmétique de ses valeurs aux quatre nœuds les plus proches, de manière qu'on ait

$$(7) \quad 4f(x, y) = f(x+h, y) + f(x-h, y) + f(x, y+h) + f(x, y-h).$$

Pour abréger, nous appellerons *fonction préharmonique* toute fonction définie aux nœuds du réseau et jouissant de cette propriété de moyenne. D'après celle-ci, il est impossible qu'en un nœud quelconque la valeur de la fonction surpasse à la fois ses valeurs aux quatre nœuds voisins ou leur soit inférieure. Il n'y aura donc ni maximum ni minimum sur le réseau. — Juxtaposons un certain nombre de carrés du réseau en un polygone, que nous appellerons *domaine polyquadratique*. Un tel domaine étant défini, les nœuds du réseau lui seront extérieurs, intérieurs, ou périphériques. Or, on aperçoit aisément la proposition suivante :

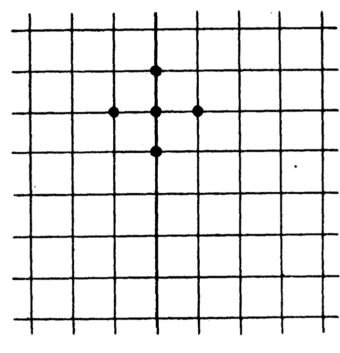


Fig. 30.

*Il existe dans un domaine polyquadratique une fonction préharmonique et une seule acquérant des valeurs données aux nœuds périphériques.*

Car la recherche de cette fonction consiste en la résolution d'un système linéaire dont les inconnues sont les valeurs aux nœuds intérieurs. Il y a autant d'équations que d'inconnues, car on doit exprimer la propriété de moyenne en chaque nœud intérieur. Enfin le déterminant n'est pas nul, car si en chaque nœud périphérique on donne la valeur zéro, la fonction cherchée s'annulera en chaque nœud intérieur (vu l'impossibilité d'un maximum ou d'un minimum), et par suite le système rendu homogène n'admet pas de solution non formée de zéros.

Or l'équation de Laplace se présente comme un cas limite de l'équation (7) quand $h$ devient très petit. Appelons *fonction harmonique* une solution de l'équation de Laplace, continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres. Nous prévoyons par ce qui précède le résultat suivant, qu'on démontre d'ailleurs rigoureusement :

*Soit un domaine limité par un ou plusieurs contours et une succession de valeurs données sur chacun d'eux. Il existe une fonction harmonique et une seule dans ce domaine, prenant sur les bords des valeurs données; elle n'a dans le domaine ni maximum, ni minimum* [1].

On peut généraliser au cas de trois dimensions, en prenant l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

et cherchant la solution, continue ainsi que ses dérivées premières et secondes dans un certain domaine et acquérant des valeurs données sur la ou les surfaces qui le délimitent. L'existence et l'unicité d'une telle solution, qu'on établit avec une large généralité, constituent le *principe de* Dirichlet.

---

(1) C'est précisément de cette dernière propriété que résulte l'unicité de la solution.

**258**. Revenons à l'équation de LAPLACE dans le plan. Si nous prenons une fonction analytique $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$,

$$f(z) = \mathrm{P}(x, y) + i\mathrm{Q}(x, y),$$

sa partie réelle P et sa partie imaginaire Q sont des fonctions harmoniques. Il nous est donc loisible d'en former de très nombreuses. On peut encore remarquer qu'en vertu de la relation

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{Log} f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z),$$

le logarithme du module d'une fonction analytique est une fonction harmonique. Appliquons ceci à la fonction $z - z_0$ (en désignant par $z_0$ une constante). Nous voyons que $\log r$ (où $r$ est la distance des images de $z$ et de $z_0$) est harmonique. Comme on peut écrire

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

on connaît une intégrale

$$u(x, y; x_0, y_0) = \log r$$

de l'équation

$$\text{(9)} \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2} = 0,$$

intégrale qui dépend de deux paramètres arbitraires $x_0$, $y_0$.

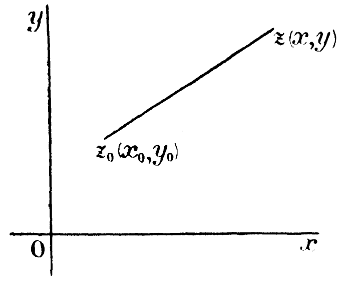


Fig. 31.

Grâce au fait que l'équation est linéaire, nous pourrons de l'intégrale précédente, ou mieux de la famille d'intégrales précédentes, déduire de nouvelles intégrales, en pratiquant des opérations de *composition linéaire* au sein de cette famille. Considérons d'abord $n$ points

$$(a_1, b_1), \qquad (a_2, b_2), \ \ldots \qquad (a_n, b_n),$$

par exemple les sommets successifs d'une ligne brisée, et affectons-les de coefficients $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Il est clair que l'expression

$$\varepsilon_1 u(x, y; a_1, b_1) + \varepsilon_2 u(x, y; a_2, b_2) + \ldots + \varepsilon_n u(x, y; a_n, b_n)$$

sera une intégrale de (9). Mais alors, on songe à passer du cas d'une ligne brisée à celui d'une courbe C, dont la tangente varie continûment. Soit $s$ l'abscisse curviligne d'un point courant $(a, b)$ de cette courbe. L'expression

$$\int_{\mathrm{C}} \varphi(s) u(x, y; a, b)\, ds$$

représente encore (comme le confirme la règle de dérivation de LEIBNIZ, appliquée en supposant le point $x$, $y$ hors de C) une intégrale de (9), quelle que soit la fonction continue $\varphi(s)$.

On peut remarquer de plus que la dérivation est elle-même une opération de composition linéaire : toute dérivée première

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial a} + \beta \frac{\partial u}{\partial b} \qquad (\alpha, \beta, \text{ indépendants de } x, y)$$

de la fonction $u$ par rapport au point $(a, b)$ dans une certaine direction est une nouvelle intégrale de (9). Reprenons la courbe précédente C et supposons que $\alpha$, $\beta$ soient les cosinus directeurs de la normale en un point $(a, b)$ de cette courbe, de sorte que l'on peut écrire

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial a}+\beta\frac{\partial u}{\partial b}=\frac{du}{dn},$$

$\frac{d}{dn}$ signifiant la dérivée prise suivant la normale à cette courbe. Alors

$$\int_C \varphi(s)\frac{du}{dn}ds$$

est encore une intégrale.

Ces remarques dépassent de beaucoup la théorie de l'équation de LAPLACE et s'appliquent à l'étude de classes étendues d'équations aux dérivées partielles linéaires : leur intérêt est de fournir des solutions dépendant de fonctions arbitraires. On pourra ensuite essayer de déterminer ces dernières de manière que la solution correspondante remplisse une condition imposée d'avance (notamment une condition sur la courbe C d'intégration). On sera ainsi conduit à résoudre des *équations intégrales linéaires.*

**259.** Pour montrer la portée de ces considérations, nous les appliquerons à la résolution du problème de DIRICHLET pour le cercle.

Soient $\alpha$, $\beta$ deux nombres complexes quelconques. Considérons la fonction $\frac{z-\alpha}{z-\beta}$. La partie imaginaire de son logarithme est l'argument de ce quotient, ou encore l'angle sous lequel le segment $\alpha\beta$ est vu du point $z$. Donc cet angle est une fonction harmonique des coordonnées cartésiennes $x$, $y$ de $z$.

Soit maintenant une ligne brisée $\alpha_0\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$, et $\omega_i$ l'angle sous lequel le côté $\alpha_{i-1}\alpha_i$ est vu du point $z$. Quelles que soient les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, la fonction

$$c_1\omega_1+c_2\omega_2\ldots+c_n\omega_n$$

est harmonique en $x$, $y$.

Passons d'une ligne polygonale à une courbe : un élément d'arc $ds$ sera vu du point $(x, y)$ sous un angle $d\omega$,

$$d\omega=\theta(x, y, s)ds,$$

où $\theta(x, y, s)$ est harmonique en $x$, $y$ [1]. L'intégrale

$$\text{(10)} \qquad U(x, y)=\int_C \varphi(s)d\omega,$$

sera encore harmonique.

---

[1] $\theta(x, y, s)$ représente la dérivée, suivant la tangente à C, dans le sens des arcs croissants, de l'angle sous lequel on voit du point fixe $(x, y)$ un arc de la courbe d'origine fixe et d'extrémité $s$. Comme l'indique la figure 32, cet angle est l'argument de $z_0 - z$ (ou du moins

Nous allons écrire plus explicitement cette intégrale dans le cas où la courbe C (qui n'est pas nécessairement fermée) est une circonférence de rayon R. Soit M le point de la circonférence qui a pour abscisse curviligne $s$ ; si nous posons $s = R\theta$, $\theta$ désignera l'abscisse angulaire de M. Prenons pour pôle le centre O de la circonférence, pour axe polaire O$x$ la droite $\theta = 0$ et déterminons la position de P par ses coordonnées polaires $(r, \alpha)$. L'angle $\omega$ désignera maintenant avec précision celui sous lequel l'arc AM est vu de P.

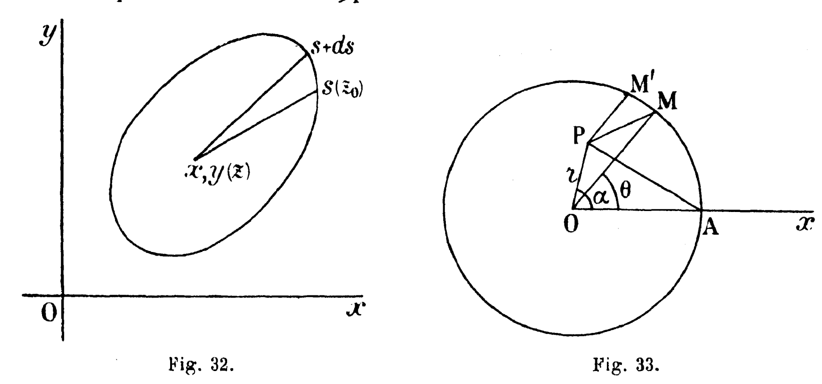



Fig. 32. Fig. 33.

Pour un déplacement infiniment petit MM′ du point M sur la circonférence, on trouve aisément (proportionnalité des sinus aux côtés dans le triangle PMM′)

$$d\omega = \frac{MM' \cos(\widehat{MP, OM})}{PM} = \frac{R \cos OMP}{PM} d\theta.$$

Nous aurons donc une intégrale de la forme

$$U_P = \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \frac{R \cos OMP}{PM} d\theta;$$

or on a, dans le triangle OPM,

$$\begin{aligned} R &= OP \cos POM + PM \cos OMP \\ &= r\cos(\alpha - \theta) + PM \cos OMP, \end{aligned}$$

---

n'en diffère que d'une constante additive). Ainsi $\theta$ est la dérivée tangentielle de $\arg(z_0 - z)$. Or nous avons

$$\text{Log}(z_0 - z) = \log|z_0 - z| + i \arg(z_0 - z),$$

donc la dérivée tangentielle de $\arg(z_0 - z)$ est égale (au signe près) à la dérivée normale de $\log|z_0 - z|$ (conséquence de l'égalité au signe près des dérivées de la partie réelle et de la partie imaginaire d'une fonction analytique, prises dans des directions rectangulaires). Ceci expliquera au lecteur pourquoi d'autres ouvrages substituent à l'intégrale (10) l'intégrale (10′) $\int_C \varphi(s) \frac{d \log r}{dn} ds$. Ces intégrales sont égales ou opposées, suivant la convention adoptée pour le sens de la normale.

d'où $$\frac{\mathrm{R}\cos \mathrm{OMP}}{\mathrm{PM}}=\frac{\mathrm{R}[\mathrm{R}-r\cos(\alpha-\theta)]}{\overline{\mathrm{PM}}^2}=\frac{\mathrm{R}[\mathrm{R}-r\cos(\alpha-\theta)]}{\mathrm{R}^2+r^2-2\mathrm{R}r\cos(\alpha-\theta)},$$

et finalement

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{U_P}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{R}[\mathrm{R}-r\cos(\alpha-\theta)]}{\mathrm{R}^2+r^2-2\mathrm{R}r\cos(\alpha-\theta)}\psi(\theta)\,d\theta.$$

Cela posé, pour résoudre le problème de Dirichlet dans le cas du cercle, désignons par $f(\alpha)$ la fonction de $\alpha$ continue et périodique, de période $2\pi$, qui exprime la distribution des valeurs données sur la circonférence, en chaque point d'abscisse angulaire $\alpha$. Il faut choisir $\psi(\theta)$ de manière que l'intégrale (11) tende vers $f(\alpha_0)$ lorsque le point P tend, d'une manière quelconque, en restant intérieur au cercle, vers le point de la circonférence d'abscisse angulaire $\alpha_0$, et cela quel que soit $\alpha_0$.

Nous aurons donc la condition

$$\text{(12)} \qquad \lim_{r\to \mathrm{R}}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{R}[\mathrm{R}-r\cos(\alpha-\theta)]}{\mathrm{R}^2-2\mathrm{R}r\cos(\alpha-\theta)+r^2}\psi(\theta)\,d\theta=f(\alpha),$$

(en réalité, elle exprime seulement que la valeur limite est atteinte quand P se rapproche de la circonférence suivant un rayon déterminé, d'angle polaire $\alpha$ ; il resterait à vérifier que cette condition, une fois réalisée, entraîne la précédente : nous l'admettrons pour éviter des longueurs).

Mais une précaution s'impose dans le calcul de la limite (12), qui est celle d'une expression de la forme

$$\mathrm{U_P}=\int_{\mathrm{C}}\psi_{\mathrm{M}}\,d\omega_{\mathrm{P}}.$$

On voit en effet que si $\psi_{\mathrm{M}}=1$ l'intégrale du second membre a pour valeur $2\pi$, 0 ou $\pi$ suivant que le point P est dans le cercle, au dehors, ou sur la circonférence : cette courbe est donc, dans le cas particulier où $\psi=1$, une ligne de discontinuité pour $\mathrm{U_M}$. On prévoit qu'il en sera de même dans le cas général : autrement dit, $\mathrm{U_P}$ ne tend pas en général vers $\mathrm{U_{P_0}}$ quand P tend vers le point $\mathrm{P_0(R,\ \alpha)}$ de la circonférence.

Pour en décider, considérons l'intégrale

$$\mathrm{V_P}=\int_{\mathrm{C}}(\psi_{\mathrm{M}}-\psi_{\mathrm{P_0}})\,d\omega_{\mathrm{P}}\,;$$

il est facile de montrer que cette intégrale est continue au point $\mathrm{P_0}$ [1]. On a alors, si P est intérieur au cercle,

$$\mathrm{V_P}=\mathrm{U_P}-\psi_{\mathrm{P_0}}\int d\omega_{\mathrm{P}}=\mathrm{U_P}-2\pi\psi_{\mathrm{P_0}}$$

[1] Pour cela, il faut montrer que quel que soit $\varepsilon>0$, on peut prendre P assez voisin de $\mathrm{P_0}$ pour avoir $|\mathrm{V_P}-\mathrm{V_{P_0}}|<\varepsilon$. A cet effet décomposons l'intégrale $\mathrm{V_P}$ en deux parties, l'une $v_{\mathrm{P}}$ étendue à l'arc $\mathrm{P_1P_2}$ de milieu $\mathrm{P_0}$, l'autre $w_{\mathrm{P}}$ au reste de la circonférence. Grâce à la con-

et

$$V_{P_0} = U_{P_0} - \psi_{P_0} \int d\omega_{P_0} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \psi(\theta)\, d\theta - \pi\psi_{P_0},$$

et enfin, en écrivant que $\lim\limits_{P \to P_0} V_P = V_{P_0}$,

$$\lim_{P \to P_0} U_P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \psi(\theta)\, d\theta + \pi\psi_{P_0}.$$

On voit d'après cela qu'il faut écrire

$$\lim_{r=R} \int_0^{2\pi} \frac{R[R - r\cos(\alpha - \theta)]}{R^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta) + r^2} \psi(\theta)\, d\theta = \pi\psi(\alpha) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \psi(\theta)\, d\theta,$$

ce qui nous conduit à détciminer la fonction inconnue $\psi$ par l'équation intégrale

(13) $$\pi\psi(\alpha) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \psi(\theta)\, d\theta = f(\alpha).$$

Cette équation se résout immédiatement, car nous voyons que la fonction inconnue est de la forme

$$\psi(\alpha) = \frac{f(\alpha) + C}{\pi},$$

où C désigne une constante. Portons dans (13) : il vient

$$C = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta,$$

d'où

$$\psi(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\pi} - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta;$$

la solution sera donc

$$U_P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2R[R - r\cos(\alpha - \theta)]}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta)} f(\theta)\, d\theta$$
$$- \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} f(\tau)\, d\tau \int_0^{2\pi} \frac{R[R - r\cos(\alpha - \theta)]}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta)} d\theta.$$

Mais dans la seconde ligne du second membre, pour P intérieur au cercle, l'intégrale constituant le dernier facteur est égale à $2\pi$, et l'on a

$$U_P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{2R[R - r\cos(\alpha - \theta)]}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta)} - 1 \right] f(\theta)\, d\theta,$$

ou

$$U_P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta) + r^2} f(\theta)\, d\theta.$$

---

tinuité de $\psi$ en $P_0$, on peut prendre l'arc $P_1P_2$ assez petit pour avoir, *quel que soit* P,

$$|v_P - v_{P_0}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais $w_P$ est fonction continue de P aux environs de $P_0$. Donc on peut prendre P assez voisin de $P_0$ pour avoir aussi $|w_P - w_{P_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui légitime le résultat annoncé.

Cette dernière expression fournit en définitive la solution demandée du problème de DIRICHLET dans le cas du cercle : elle est connue sous le nom d'*intégrale de* POISSON.

Cette intégrale est évidemment fonction de $r$ et de $\alpha$. On peut la développer en série par rapport à $r$, pour $r < \mathrm{R}$. On trouve aisément

$$\frac{\mathrm{R}^2 - r^2}{\mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}r\cos(\alpha-\theta)+r^2} = 1 + 2\frac{r}{\mathrm{R}}\cos(\alpha-\theta) + 2\frac{r^2}{\mathrm{R}^2}\cos 2(\alpha-\theta) + \ldots + 2\frac{r^n}{\mathrm{R}^n}\cos n(\alpha-\theta) + \ldots;$$

ce développement est uniformément convergent quel que soit $\theta$, ses termes étant inférieurs en module à ceux de la progression géométrique $2\frac{r^n}{\mathrm{R}^n}$, indépendante de $\theta$. Donc on peut multiplier par $\frac{f(\theta)\,d\theta}{2\pi}$ et intégrer de 0 à $2\pi$. On trouve ainsi

$$(14) \qquad \mathrm{U}_{\mathrm{P}} = \mathrm{U}(r, \alpha) = \frac{a_0}{2} + \frac{r}{\mathrm{R}}(a_1\cos\alpha + b_1\sin\alpha) + \ldots + \frac{r^n}{\mathrm{R}^n}(a_n\cos n\alpha + b_n\sin n\alpha) + \ldots,$$

avec $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\,d\theta;$$

ainsi $a_n$ et $b_n$ sont les coefficients de FOURIER de la fonction continue et périodique $f(\theta)$ et le développement (14) est applicable à l'intérieur du cercle, même si le développement de FOURIER attaché à $f(\theta)$ n'est pas convergent.

Cette remarque suggère une application : supposons le développement de FOURIER de $f(\theta)$ divergent. On aura néanmoins

$$f(\theta) = \lim_{x\to 1}\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n[a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta]\right\},$$

$x$ désignant un nombre réel compris entre 0 et 1. Par l'introduction de ce paramètre et l'opération de passage à la limite, nous attribuons au développement de Fourier, en dépit de sa divergence, une *somme* égale à la fonction continue qui lui a donné naissance (1).

Ces aperçus suffiront pour montrer que la théorie des équations aux dérivées partielles constitue un domaine extrêmement vaste, dont la structure n'est nullement révélée par les aspects de la théorie des équations différentielles ordinaires. Nous allons maintenant restreindre le sujet, et nous limiter à l'étude des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

---

(1) Seulement cette somme n'est plus la limite des $\mathrm{S}_n$. On adopte une définition nouvelle du mot *somme*. Voir les *Leçons sur les séries divergentes* de M. Émile BOREL.

## CHAPITRE II

# ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE

**260. Choix d'un point de vue.** — Dans un exposé relatif aux équations différentielles ou aux dérivées partielles, on peut adopter deux points de vue bien différents :

1° Supposer toutes les données du problème analytiques, et chercher à définir l'intégrale dans le champ complexe; c'est ce qu'on réalise lorsqu'on établit le théorème de CAUCHY par la méthode des fonctions majorantes, soit pour les équations différentielles (nos 149-150), soit pour les équations aux dérivées partielles.

2° Se borner au contraire au champ réel, et démontrer l'existence des intégrales satisfaisant aux conditions données (supposées propres à les déterminer) en faisant le minimum d'hypothèses sur les fonctions introduites, notamment en ce qui concerne l'existence de dérivées de tel ou tel ordre de ces fonctions.

De ce point de vue, considérons par exemple l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = f(x, y),$$

où $f$ est une fonction continue, dans un certain rectangle

$$x_1 < x < x_2, \qquad y_1 < y < y_2,$$

des deux variables $x$, $y$ (dans leur ensemble). *Peut-on affirmer qu'il existe une fonction dérivable*

$$y = \varphi(x)$$

*et une seule qui pour* $x_0$ (compris entre $x_1$ et $x_2$) *se réduise à* $y_0$ (compris entre $y_1$ et $y_2$) *et qui vérifie l'équation* (1)?

Sans hypothèse complémentaire sur la fonction $f(x, y)$, ce résultat, si intuitif puisse-t-il paraître, serait cependant inexact. Soit par exemple l'équation

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2},$$

dont le second membre est une fonction réalisant les conditions ci-dessus

dans tout le plan. Donnons à $x_0$ une valeur quelconque et prenons $y_0 = 0$. Alors les deux solutions

$$y = 0 \qquad \text{et} \qquad y = (x - x_0)^3$$

conviennent également (¹).

Pour que l'énoncé précédent soit exact, il faut ajouter une condition restrictive, par exemple *admettre que $f'_y$ reste bornée dans le rectangle considéré*. Moyennant quoi on peut établir la proposition que nous avons en vue par des raisonnements faisant exclusivement appel à la théorie des fonctions de variables réelles.

Voici brièvement le principe de la démonstration de M. Picard (*méthode des approximations successives*). On remarque qu'une solution de (1) qui se réduit à $y_0$ pour la valeur $x_0$ satisfait nécessairement à l'équation intégrale

$$(2) \qquad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t,\ y(t)]\,dt.$$

Considérons la fonction

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ y_0)\,dt;$$

on passe de $y_1(x)$ à une nouvelle fonction $y_2(x)$ par la même opération,

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t,\ y_1(t)]\,dt,$$

et ainsi de suite. On pose en général

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t,\ y_{n-1}(t)]\,dt, \qquad [\text{avec } y_0(x) = y_0].$$

*Grâce à l'hypothèse faite sur $f'_y$*, on établit alors que dans un intervalle partiel de l'intervalle primitif $(x_1,\ x_2)$, la série

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)] = \lim_{n \to \infty} y_n(x)$$

converge absolument et uniformément (²). On a donc une fonction limite $y(x)$

(¹) Pareillement, toutes les fonctions $y = C - \sqrt{C^2 + x^4}$ $(C > 0)$, qui représentent des courbes passant par l'origine, satisfont à l'équation $y' = \frac{4yx^3}{y^2 + x^4}$ : bien que le second membre soit fonction continue de $x$ et $y$ au voisinage de l'origine, il passe par ce point une infinité de courbes intégrales. Cet exemple est dû à M. Peano.

(²) Considérons un intervalle $(x_0,\ x_0 + a)$ de variation de $x$, et un intervalle $(y_0 - b,\ y_0 + b)$ de variation de $y$, tels que le point $(x,\ y)$ reste intérieur à notre rectangle. Soit M la borne supérieure du module de $f(x,\ y)$ entre ces nouvelles limites. On peut prouver la convergence des $y_n$ dans un intervalle partiel $(x_0,\ x_0 + h)$ de l'intervalle $(x_0,\ x_0 + a)$. Soit, pour

des $y_n(x)$, et, puisque cette limite est atteinte uniformément, elle vérifie l'équation (2). La solution est d'ailleurs unique, contrairement à ce qui se passait dans l'exemple de tout à l'heure. C'est ce qu'on peut établir aisément [1].

Notons qu'on établit, par ce même procédé et moyennant des conditions analogues, l'existence des intégrales d'un système tel que

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= A(x, y, z, u, v), \\ \frac{dz}{dx} &= B(x, y, z, u, v), \\ \frac{du}{dx} &= F(x, y, z, u, v), \\ \frac{dv}{dx} &= G(x, y, z, u, v), \end{aligned}\right.$$

les quatre fonctions $y$, $z$, $u$, $v$ devant se réduire respectivement à des valeurs données pour la valeur $x_0$ de $x$. On supposera ici que les fonctions A, B, F, G possèdent par rapport à $y$, $z$, $u$, $v$ des dérivées partielles qui demeurent bornées dans le champ utile.

Nous avons ainsi une idée suffisamment nette des raisonnements qu'on peut utiliser pour édifier la théorie des équations différentielles dans le champ réel. Ce point de vue ayant l'avantage d'être le plus étroitement associé à l'intuition géométrique, c'est à lui que nous nous tiendrons dans l'étude des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Nous chercherons donc à ébaucher cette théorie dans le domaine réel, sans introduire trop d'hypothèses

---

fixer les idées, $a > 0$ : alors nous prendrons pour $h$ le plus petit des deux nombres $a$ et $\frac{b}{M}$. Moyennant quoi, on prouve d'abord que dans $(x_0, x_0 + h)$ les $y_n(x)$ demeurent compris entre $y_0 - b$ et $y_0 + b$ (raisonnement récurrent). On peut alors écrire

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| < \int_{x_0}^{x} |f[t, y_{n-1}(t)] - f[t, y_{n-2}(t)]|\, dt;$$

or l'élément d'intégrale, grâce à ce que $f'_y$ est borné, admet une limitation de la forme

$$K\,|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)|.$$

Écrivant l'inégalité ainsi transformée pour les valeurs successives 1, 2, 3, ... de $n$, on obtient l'inégalité finale

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| < MK^{n+1}\frac{(x - x_0)^n}{n!},$$

d'où résulte la convergence annoncée.

[1] On utilise le même principe. S'il existait une seconde intégrale $z(x)$ se réduisant à $y_0$ pour la valeur $x_0$, on pourrait écrire

$$y_n(x) - z(x) = \int_{x_0}^{x} \{ f[t, y_{n-1}(t)] - f[t, z(t)] \}\, dt;$$

le même jeu d'inégalités que précédemment nous conduirait finalement à une relation de la forme

$$|y_n(x) - z(x)| < C\frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

prouvant que $z(x)$ est la limite des $y_n(x)$.

superflues [1]. Pour opérer aussi commodément que possible, nous ferons appel à des considérations géométriques : nous serons ainsi conduits intuitivement aux propositions essentielles, et il restera ensuite (ce qui importe) à les soumettre au contrôle de l'Analyse, dans la mesure où cela peut se faire ici.

**261. Préliminaires intuitifs** [2]. — L'intuition fournit des données nombreuses dans l'ordre d'idées actuellement étudié. Nous allons d'abord les résumer, sans souci de rigueur. Les résultats que nous avons en vue s'associent à différentes images; les uns procèdent de relations de contact (surfaces enveloppes), les autres de la théorie des champs de vecteurs. Nous allons puiser alternativement à ces deux sources.

**1° Recours aux champs vectoriels.** — Supposons défini un champ vectoriel, par la donnée de ses trois composantes

$$P(x, y, z), \qquad Q(x, y, z), \qquad R(x, y, z)$$

en chaque point $(x, y, z)$ d'un système de trois axes rectangulaires; nous supposerons que, dans une certaine région de l'espace, P, Q, R remplissent les conditions requises pour qu'il ne passe, en chaque point de cette région, qu'*une ligne intégrale* (on dit aussi : une *ligne de force*) de ce champ, c'est-à-dire une ligne tangente en chaque point au vecteur du champ. Ces lignes forment donc une congruence.

Cherchons s'il existe des surfaces les coupant orthogonalement. S'il en est ainsi, ces surfaces vérifieront l'*équation aux différentielles totales*

$$(1) \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

qui exprime qu'un déplacement différentiel $(dx, dy, dz)$ relatif à l'une d'elles est orthogonal au champ. Dans quel cas l'équation (1) admet-elle une intégrale de la forme

$$F(x, y, z) = C\,?$$

Elle doit alors équivaloir à l'équation

$$(2) \qquad F'_x\,dx + F'_y\,dy + F'_z\,dz = 0,$$

et par suite il faut qu'on puisse déterminer une fonction $\lambda(x, y, z)$ telle qu'on ait

$$\frac{F'_x}{P} = \frac{F'_y}{Q} = \frac{F'_z}{R} = \lambda.$$

Exprimons donc que

$$\lambda(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$$

[1] La recherche du minimum d'hypothèses est un sujet tres difficile, dont l'étude a été entamée par M. Baire.

[2] Cet exposé préliminaire a une grande importance pratique. On y trouvera les règles qui sont d'une application courante dans les problèmes, avec des exemples.

est une différentielle totale. Nous devrons avoir

$$(3) \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}(\lambda R) - \frac{\partial}{\partial z}(\lambda Q) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z}(\lambda P) - \frac{\partial}{\partial x}(\lambda R) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(\lambda Q) - \frac{\partial}{\partial y}(\lambda P) = 0; \end{cases}$$

en effectuant les dérivations, multipliant les équations ainsi transformées par P, Q, R et ajoutant, on obtient la *condition d'intégrabilité* de (1)

$$(4) \qquad P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$$

Ce raisonnement prouve que la condition (4) est nécessaire à l'existence d'une famille de surfaces $F = C$, orthogonales aux lignes de champ. Il nous restera à démontrer qu'elle est suffisante.

Remarques. — I. Ainsi que cela a été expliqué ailleurs, toutes les formules que nous rencontrerons ici pour exprimer des conditions intrinsèques pourront s'écrire elles-mêmes sous forme intrinsèque.

Désignons par la notation **V** le vecteur de composantes P, Q, R. Il faut écrire que le produit scalaire $\lambda \mathbf{V}.d\mathbf{M}$ (en appelant $d\mathbf{M}$ le déplacement différentiel de composantes $dx$, $dy$, $dz$) est une différentielle totale, ou encore que le rotationnel du champ $\lambda\mathbf{V}$ est nul. C'est ce qu'expriment les équations (3); on ramène ensuite la condition

$$\boldsymbol{rot}(\lambda \mathbf{V}) = 0$$

à la condition équivalente (n° 250)

$$\lambda\, \boldsymbol{rot}\mathbf{V} + \boldsymbol{grad}\lambda \wedge \mathbf{V} = 0.$$

En faisant alors le produit scalaire par **V**, on obtient finalement la condition d'intégrabilité (4) sous la forme condensée

$$\mathbf{V}.\boldsymbol{rot}\mathbf{V} = 0.$$

Si donc il existe des surfaces trajectoires orthogonales des lignes intégrales, le rotationnel en chaque point du champ sera tangent à celle de nos surfaces qui passe en ce point. Cette propriété est d'ailleurs en relation évidente avec le théorème de Stokes : s'il existe des surfaces orthogonales au champ, la circulation de **V** le long d'un contour fermé quelconque sur une de ces surfaces sera nulle. Donc le flux du rotationnel est nul, quel que soit ce contour, et par suite sa composante normale est nulle (n° 250).

II. *Une propriété d'invariance.* — Il est clair que si l'équation

$$(1) \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

est complètement intégrable, il en sera de même de l'équation

$$(2) \qquad L\,du + M\,dv + N\,dw = 0,$$

qu'on en déduit par un changement de variables tel que

$$x = x(u, v, w), \qquad y = y(u, v, w), \qquad z = z(u, v, w).$$

Si l'intégrale de (1) est

$$\varphi[x, y, z] = C,$$

celle de (2) sera

$$\varphi[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] = C.$$

Donc la relation

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$$

entraîne nécessairement

$$L\left(\frac{\partial N}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial w}\right) + M\left(\frac{\partial L}{\partial w} - \frac{\partial N}{\partial u}\right) + N\left(\frac{\partial M}{\partial u} - \frac{\partial L}{\partial v}\right) = 0.$$

C'est d'ailleurs ce qu'un calcul direct permettrait de vérifier.

En particulier, si le changement de variables a pu être choisi de manière que N soit nul, la complète intégrabilité de (1) entraînera que le rapport de L à M soit indépendant de $w$. Nous allons indiquer, à titre d'application de cette remarque, une méthode d'intégration de l'équation (1) due à J. BERTRAND.

Supposons vérifiée identiquement la condition $\mathbf{V}.\boldsymbol{rot}\mathbf{V} = 0$. Alors, si S est une surface intégrale de (1), le champ $\boldsymbol{rot}\mathbf{V}$ lui est tangent en chaque point : déterminons, sous le nom de *lignes de tourbillon*, les lignes qui dans l'espace sont tangentes en chaque point au champ $\boldsymbol{rot}\mathbf{V}$. Les lignes de S qui en chaque point possèdent ce même caractère ne sont pas autre chose que des lignes de tourbillon particulières, de sorte que la surface S est un lieu de lignes de tourbillon. Soit

$$(3) \qquad \frac{dx}{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}} = \frac{dy}{\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}} = \frac{dz}{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}$$

le système qui définit ces lignes. Soient $u(x, y, z)$ et $v(x, y, z)$ deux intégrales premières de ce système. Nous avons simultanément les trois relations

$$\boldsymbol{grad}\, u.\boldsymbol{rot}\mathbf{V} = 0, \qquad \boldsymbol{grad}\, v.\boldsymbol{rot}\mathbf{V} = 0, \qquad \mathbf{V}.\boldsymbol{rot}\mathbf{V} = 0,$$

donc les trois vecteurs $\boldsymbol{grad}\, u$, $\boldsymbol{grad}\, v$ et $\mathbf{V}$ sont coplanaires. Nous avons donc une relation

$$\mathbf{V} = \lambda\, \boldsymbol{grad}\, u + \mu\, \boldsymbol{grad}\, v$$

en vertu de laquelle nous pourrons écrire

$$\mathbf{V}.d\mathbf{M} = \lambda\, du + \mu\, dv.$$

Or puisque $\mathbf{V}.d\mathbf{M}$ est le premier membre d'une équation complètement intégrable, il en sera de même de $\lambda\, du + \mu\, dv$ et, par suite, le rapport $\mu : \lambda$ ne dépendra que de $u$ et de $v$.

Indiquons sans développement que l'on pourrait faire de ces considérations la base d'une théorie rigoureuse des équations aux différentielles totales dans le champ réel. Pour cela, il faudrait supposer essentiellement, non seulement qu'on a bien $\mathbf{V}.\mathbf{rot}\mathbf{V} = 0$, mais encore que le système (3) se prête à l'application de la méthode des approximations successives, et il resterait à examiner s'il en est bien encore ainsi de l'équation finale $\frac{dv}{du} = f(u, v)$.

Le principe précédent peut d'ailleurs être appliqué différemment. Soit l'équation

$$dz = \mathrm{A}(x, y, z)dx + \mathrm{B}(x, y, z)dy; \tag{4}$$

supposons que la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} + \mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x} + \mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z}$$

soit identiquement vérifiée. Intégrons l'équation différentielle $\frac{d\varphi}{dx} = \mathrm{A}(x, y, \varphi)$, où $y$ joue le rôle d'un paramètre. Prenons pour nouvelle fonction inconnue $u$ celle que définit l'équation $z = \varphi(x, y, u)$, en supposant que $z = \varphi(x, y, c)$ soit l'intégrale générale de $\frac{d\varphi}{dx} = \mathrm{A}$. Alors l'équation transformée sera

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du = \mathrm{B}[x, y, \varphi(x, y, u)]dy;$$

puisque la condition d'intégrabilité est satisfaite, $x$ disparaîtra de cette équation. On sera donc ramené à l'intégration de deux équations différentielles ordinaires. Il est clair que la théorie pourrait être encore construite d'après ce point de vue.

**262.** Nous examinerons encore le problème suivant :

*Trouver toutes les surfaces qui, en chacun de leurs points, sont tangentes au champ vectoriel précédent.*

Il est clair que toute surface engendrée par une famille à un paramètre de lignes intégrales répond à la question. Inversement, soit une surface remplissant la condition demandée et M un point quelconque de cette surface. Le plan tangent en ce point contient le vecteur du champ. A chaque point de la surface est associée ainsi une direction : les courbes de la surface qui en chacun de leurs points sont tangentes à cette direction sont précisément des lignes de champ. Toute surface répondant à la question est donc bien un lieu de lignes de champ.

Si nous traduisons analytiquement le problème, nous sommes conduits à écrire que la fonction

$$z = f(x, y),$$

qui représente la surface, satisfait à l'*équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre*

$$\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q = \mathrm{R}. \tag{5}$$

Donc, pour intégrer cette équation, on résoudra préalablement le système

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}, \tag{6}$$

c'est-à-dire on cherchera les lignes intégrales du champ de vecteurs (P, Q, R).

Soit C une courbe quelconque, différente d'une courbe intégrale. Les lignes de champ qui s'appuient sur C déterminent une surface intégrale de l'équation (5). Donc, par une courbe C, on peut faire passer une surface intégrale de cette équation (*problème de* CAUCHY). Ce résultat tombe en défaut, par indétermination, lorsque C est une ligne intégrale du système (6). Pour marquer cette particularité des lignes intégrales (c'est-à-dire le fait d'être impropres à déterminer une solution du problème de CAUCHY), on dit que ce sont des *lignes caractéristiques*.

Analytiquement, on résout le problème de Cauchy, dans le cas d'une équation linéaire, de la façon suivante. Soient

$$\theta(x, y, z)=a, \qquad \varphi(x, y, z)=b$$

les équations de la congruence des lignes caractéristiques,

$$F_1(x, y, z)=0, \qquad F_2(x, y, z)=0$$

les équations d'une courbe C. Il s'agit d'établir entre $a$ et $b$ une relation $\omega(a, b)=0$ telle que, à tout couple de valeurs de $a$ et $b$ vérifiant cette relation, corresponde une caractéristique qui coupe la courbe C. La relation $\omega=0$ exprime donc la condition de compatibilité des quatre équations en $x$, $y$, $z$,

$$\theta=a, \qquad \varphi=b, \qquad F_1=0, \qquad F_2=0;$$

autrement dit on aura la relation $\omega=0$ en éliminant $x$, $y$, $z$ entre ces quatre équations. Il en résulte immédiatement que la surface cherchée est définie par l'équation

$$\omega[\theta(x, y, z),\ \varphi(x, y, z)]=0.$$

EXERCICES. — I. *On demande les surfaces intégrales de l'équation*

$$xy^2p+x^2yq=z(x^2+y^2); \tag{1}$$

*déterminer la fonction arbitraire de manière que les caractéristiques forment une famille d'asymptotiques des surfaces intégrales et trouver les trajectoires orthogonales des surfaces ainsi obtenues.*

(*Paris.*)

Le système des caractéristiques est défini par

$$\frac{dx}{xy^2}=\frac{dy}{yx^2}=\frac{dz}{z(x^2+y^2)}; \tag{2}$$

on en tire les combinaisons intégrables

$$xdx=ydy,$$
$$\frac{ydx+xdy}{xy}=\frac{dz}{z},$$

d'où l'intégrale générale du système (2)

$$xy = az,$$
$$x^2 - y^2 = \pm b^2.$$

Les surfaces intégrales de l'équation (1) seront donc représentées par l'équation

$$(3) \qquad z = xyf(x^2 - y^2),$$

$f$ désignant une fonction arbitraire de l'argument $x^2 - y^2$.

Cherchons à déterminer $f$ de manière que les caractéristiques jouent le rôle d'asymptotiques de la surface (3). Les projections de ces dernières courbes sur le plan $xOy$ sont définies par l'équation

$$(4) \qquad rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0.$$

Il faut exprimer que l'une des deux familles définies par (4) se réduit à

$$xdx - ydy = 0.$$

Or nous avons

$$r = 6xyf'(x^2 - y^2) + 4x^3yf''(x^2 - y^2),$$
$$s = f(x^2 - y^2) + 2(x^2 - y^2)f'(x^2 - y^2) - 4x^2y^2f''(x^2 - y^2),$$
$$t = -6xyf'(x^2 - y^2) + 4y^3xf''(x^2 - y^2),$$

ce qui permet d'expliciter l'équation (4) sous la forme

$$6xyf'(dx^2 - dy^2) + 4(x^2 - y^2)f'dxdy + 2fdxdy$$
$$+ 4f''xy(x^2dx^2 - 2xydxdy + y^2dy^2) = 0.$$

Cette équation doit contenir en facteur $xdx - ydy$, ou, ce qui revient au même, son premier membre doit s'annuler quand on y remplace $dx$ et $dy$ par $y$ et $x$, d'où la condition

$$3(y^2 - x^2)f' + 2(x^2 - y^2)f' + f = 0;$$

en posant $x^2 - y^2 = u$, on doit donc avoir l'identité

$$f(u) - uf'(u) = 0,$$

donc $f(u)$ doit être proportionnel à $u$, ce qui donne les surfaces

$$z = xy\frac{x^2 - y^2}{\alpha^3}.$$

L'équation différentielle de ces surfaces s'écrit

$$d\left[\frac{xy(x^2 - y^2)}{z}\right] = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + 2\frac{xdx - ydy}{x^2 - y^2} - \frac{dz}{z} = 0;$$

cherchons les lignes qui les coupent à angle droit. Elles sont définies par le système

$$\frac{dx}{\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - y^2}} = \frac{dy}{\frac{1}{y} - \frac{2y}{x^2 - y^2}} = -zdz,$$

ou

$$\frac{x(x^2 - y^2)dx}{3x^2 - y^2} = \frac{y(x^2 - y^2)dy}{x^2 - 3y^2} = -zdz;$$

on a deux combinaisons intégrables

$$-zdz = \frac{xdx + ydy}{4},$$
$$\frac{xdx}{3x^2 - y^2} = \frac{ydy}{x^2 - 3y^2},$$

qui donnent les lignes trajectoires orthogonales

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4z^2 = \pm \lambda^2, \\ x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = \pm \mu^4. \end{cases}$$

Les surfaces trajectoires orthogonales (1) seront donc définies par l'équation générale

$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = \varphi(x^2 + y^2 + 4z^2).$$

II. *Intégrer l'équation*

$$(1) \qquad \left[px + qy - \frac{(x^2+y^2)^2}{2axy}\right]^2 = \frac{(x^2+y^2)^2 - 4azxy}{4a^2x^2y^2}(x^2+y^2)^2.$$

On peut tirer de cette équation la valeur de $px + qy$ en fonction de $x$, $y$, $z$. Ce n'est donc, sous forme camouflée, qu'une équation linéaire en $p$ et $q$. Le système des caractéristiques sera ici

$$(2) \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\frac{(x^2+y^2)^2}{2axy} \pm \frac{x^2+y^2}{2axy}\sqrt{(x^2+y^2)^2 - 4axyz}},$$

et peut encore s'écrire $\qquad ydx - xdy = 0,$

$$\frac{xdx + ydy}{2axy} = \frac{dz}{x^2 + y^2 \pm \sqrt{(x^2+y^2)^2 - 4axyz}};$$

la dernière équation s'écrit encore

$$axy\,dz^2 - (x^2 + y^2)(xdx + ydy)\,dz + z(xdx + ydy)^2 = 0,$$

ou, en tenant compte de $ydx - xdy = 0$,

$$a\,dx\,dy\,dz^2 - (xdx + ydy)\,dz\,(dx^2 + dy^2) + z(dx^2 + dy^2)^2 = 0;$$

après division par $dx^2 + dy^2$, on a une nouvelle forme de cette équation,

$$a\frac{dx\,dy\,dz^2}{dx^2 + dy^2} + dx(z\,dx - x\,dz) + dy(z\,dy - y\,dz) = 0,$$

avec $\qquad y\,dx - x\,dy = 0.$

Nous rencontrons ici un système de deux équations de MONGE (nos 244 à 247)

$$\varphi(ydz - zdy,\ zdx - xdz,\ xdy - ydx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0,$$
$$\psi(ydz - zdy,\ zdx - xdz,\ xdy - ydx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0,$$

où $\varphi$ et $\psi$ sont homogènes par rapport aux six coordonnées *plückériennes*

$$ydz - zdy, \qquad zdx - xdz, \qquad xdy - ydx, \qquad dx,\ dy,\ dz$$

de la tangente à une courbe intégrale de (2). Un tel système nous offre, dans l'espace à trois dimensions, la *généralisation de l'équation de* CLAIRAUT. Son intégrale générale

(1) Nous rencontrons ici une application, fréquemment citée, des équations linéaires : étant donnée une famille de surfaces dépendant d'un paramètre, trouver les surfaces qui les coupent à angle droit. — Si à chaque surface de la famille nous menons la normale en un point quelconque, et si nous portons sur cette normale un vecteur unitaire (pour fixer les idées), nous définissons un champ de vecteurs. Les surfaces orthogonales à la famille donnée seront des surfaces tangentes, en chacun de leurs points, au vecteur du champ. Donc on les obtient en intégrant une équation de la forme $Pp + Qq = R$, laquelle admet précisément pour caractéristiques les lignes trajectoires orthogonales de la famille de surfaces données.

est une *congruence de droites*. En outre, il admet des intégrales singulières : ce sont naturellement, sur les deux nappes de la surface focale, les arêtes de rebroussement des développables de la congruence.

Il importait de donner un exemple de cette nature pour montrer ce qui peut se produire lorsqu'on renonce à cette hypothèse, faite antérieurement : il passe par chaque point une ligne de champ et une seule. A côté des surfaces qui vérifient l'équation proposée et qui sont fournies par l'intégrale générale, il existe alors d'autres surfaces intégrales, jouant le rôle d'*intégrales singulières* : elles sont obtenues comme surfaces focales de la congruence caractéristique.

Dans l'exemple actuel, cette congruence se compose des rayons rectilignes rencontrant l'axe $Oz$ et tangents à la surface d'annulation du discriminant de l'équation (1) ordonnée en $px+qy$,

$$(S) \qquad 4axyz-(x^2+y^2)^2=0.$$

Cette surface est l'intégrale singulière de l'équation (1); on peut encore l'engendrer par des lignes intégrales du système (2), mais ces lignes sont maintenant des intégrales singulières de notre système : ce sont évidemment les sections de S par les plans menés par $Oz$.

III. *Trouver les surfaces* S *telles qu'en menant le plan tangent en un point quelconque* M *de l'une, et en prenant sa trace sur le plan* $xOy$, *il existe sur cette droite un point* T *tel que le triangle* OMT *soit semblable à un triangle fixe.*

Le point M étant donné dans l'espace, on peut, si une certaine inégalité est vérifiée [1], trouver dans le plan $xOy$ deux points T′ et T″, symétriques par rapport au plan $zOM$, tels que les triangles OMT′ et OMT″ soient semblables au triangle fixe de l'énoncé. Optons pour l'un d'eux, soit OMT′. Alors nos surfaces sont celles dont le plan tangent en M contient le vecteur MT : à ce titre elles vérifient une équation linéaire en $p$ et $q$. Les caractéristiques sont les lignes telles qu'en appelant T la trace de la tangente sur le plan $xOy$, le triangle OMT soit semblable à un triangle donné. Pour la recherche de ces lignes, nous laisserons au lecteur le soin de faire les calculs, en le renvoyant, si c'est nécessaire, à notre *Initiation aux méthodes vectorielles* [2].

Dans le problème actuel, la direction (P, Q, R) reste invariante en chaque point lorsqu'on fait :

1° une rotation autour de $Oz$;

2° une homothétie de centre O.

Il y a donc intérêt à prendre des coordonnées sphériques de centre O. L'usage de telles considérations s'impose dans les problèmes de ce genre : ces problèmes sont souvent demandés, car outre leur caractère esthétique, ils présentent pour ceux qui ont à charge de donner des textes d'examen l'avantage de leur permettre d'accomplir leur mission sans grand effort. A ce point de vue, nous ne saurions trop attirer l'attention du lecteur sur les considérations que nous avons présentées dans la seconde partie du chap. VII du précédent ouvrage (voir notamment les nos 97 et 98).

**263.** Avant de quitter les champs de vecteurs, nous ferons encore quelques remarques. Jusqu'ici, dans les problèmes que nous avons examinés, la fonction inconnue dépendait de *deux* variables indépendantes, ou si l'on préfère, on cherchait des surfaces remplissant certaines conditions. Dans d'autres pro-

---

(1) Cette inégalité exprimera que l'inclinaison de OM sur le plan $xOy$ ne dépasse pas (en valeur absolue) une certaine limite égale à l'un des angles du triangle donné. Donc M devra se trouver à l'extérieur d'un cône de révolution d'axe $Oz$.

(2) BOULIGAND et RABATÉ, pages 138, 139, 140, 141.

**blèmes, il peut arriver qu'on cherche une fonction de *trois* variables indépendantes, ou encore, qu'on se propose de trouver un *champ scalaire* moyennant certaines conditions. Nous indiquerons deux exemples dans lesquels cette idée peut faciliter l'obtention de la solution.**

I. *Soit un champ vectoriel donné* (P, Q, R). *Trouver une fonction* $\omega(x, y, z)$ *telle qu'on ait*

$$\text{(1)} \qquad P\frac{\partial\omega}{\partial x}+Q\frac{\partial\omega}{\partial y}+R\frac{\partial\omega}{\partial z}=F(\omega, x, y, z),$$

*où* F *désigne une fonction donnée, et qui prenne en chaque point d'une surface* S *donnée une valeur donnée.*

Remarquons que le premier membre de l'équation (1), où l'on peut toujours supposer, quitte à modifier F, que l'on a

$$\text{(2)} \qquad P^2+Q^2+R^2=1,$$

exprime la dérivée de la fonction $\omega$ dans la direction du champ. Il est donc naturel de considérer les lignes intégrales du système

$$\text{(3)} \qquad \frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}.$$

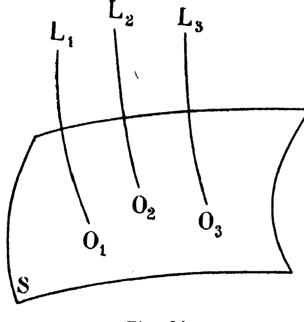


Fig. 34.

Considérons quelques-unes de ces lignes, soient $L_1$, $L_2$, $L_3$, ... qui coupent S en des points $O_1$, $O_2$, $O_3$, ... Nous déterminerons alors la fonction $\omega$ sur chacune d'elles en notant qu'elle se réduit sur celle-ci à une fonction d'une variable, par exemple l'abscisse curviligne $s$ comptée à partir de S, et que cette fonction satisfait, en vertu de (1) et de (2), à l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d\omega}{ds}=F[\omega, x(s), y(s), z(s)].$$

On prend alors l'intégrale de cette équation, qui, pour $s=0$, se réduit à la valeur donnée sur S, au pied de la ligne L choisie.

Il est clair que le calcul pourra se simplifier dans des cas particuliers : par exemple, si l'on a $F=0$, la fonction $\omega$ conservera sur chaque ligne L la valeur qu'on lui a donnée au pied de cette ligne.

II. *Trouver une fonction* $\omega$ *telle qu'on ait*

$$\text{(1)} \qquad \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2=F(\omega),$$

F *désignant une fonction donnée. Montrer que les surfaces de niveau* $\omega=$ const. *sont des surfaces parallèles.*

Changeons d'abord de fonction inconnue, en posant

$$\Omega=\int\frac{d\omega}{\sqrt{F(\omega)}},$$

ce qui ne change pas les surfaces de niveau. L'équation (1) sera remplacée par

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^2=1.$$

Considérons la surface de niveau $\Omega=0$. Je dis que $\Omega$ représente la distance du

point $(x, y, z)$ à cette surface. En effet, en chaque point d'une surface de niveau quelconque le gradient de $\Omega$ se confond avec le vecteur unitaire de la normale. Prenons maintenant une trajectoire orthogonale quelconque des surfaces de niveau, et soit $s$ l'abscisse curviligne d'un point de cette courbe. Nous aurons

$$\frac{dx}{ds}=\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \qquad \frac{dy}{ds}=\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \qquad \frac{dz}{ds}=\frac{\partial\Omega}{\partial z},$$

d'où l'on tire facilement, d'après le théorème des fonctions composées,

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^2\right]=0;$$

on a de même

$$\frac{d^2y}{ds^2}=0, \qquad \frac{d^2z}{ds^2}=0,$$

ce qui confirme l'énoncé en prouvant que chaque trajectoire orthogonale est rectiligne. Et, puisque le gradient de $\Omega$ est un vecteur unitaire, $\Omega$ en un point quelconque mesure bien la distance de ce point à la surface de niveau origine.

D'une manière générale, une fonction $\omega$ vérifiera donc une équation de la forme (1) si elle est une fonction de la distance d'un point $x$, $y$, $z$ à une surface fixe.

**264. Recours à la théorie des enveloppes.** — Soit une famille de surfaces à deux paramètres

$$V(x, y, z, a, b)=0; \tag{1}$$

sur l'une d'elles, les coefficients $p$ et $q$ du plan tangent sont définis par les équations

$$\frac{\partial V}{\partial x}+p\frac{\partial V}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y}+q\frac{\partial V}{\partial z}=0; \tag{2}$$

si entre ces trois équations nous éliminons $a$ et $b$, nous obtiendrons une *équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$F(x, y, z, p, q)=0. \tag{3}$$

*Analytiquement*, cette équation exprime la compatibilité des équations (1) et (2) par rapport aux inconnues $a$ et $b$.

*Géométriquement*, elle définit tous les éléments de contact appartenant aux surfaces représentées par l'équation (1). Donc, par tout point d'une surface satisfaisant à l'équation (3) passe une surface de la famille (1) qui lui est tangente en ce point, et réciproquement toute surface qui est tangente en chacun de ses points à une surface de la famille (1) satisfait à l'équation (3).

On aperçoit facilement des solutions de l'équation (3) :

1° les surfaces de la famille (1);

2° les surfaces enveloppes de familles à un paramètre telles que la suivante,

$$V[x, y, z, a, \varphi(a)]=0,$$

obtenue en posant $b=\varphi(a)$ dans l'équation (1);

3° l'enveloppe (lorsqu'elle existe) de la famille des surfaces (1), les deux paramètres $a$ et $b$ étant regardés comme indépendants.

Le fait que ces diverses enveloppes sont des surfaces intégrales de l'équation (3) est immédiat; en effet, nous partons d'enveloppées qui satisfont à cette équation. Or, en chaque point de contact de l'enveloppe et d'une enveloppée, $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ prennent les mêmes valeurs.

Réciproquement, nous établirons plus loin que l'on épuise bien, par le procédé qui vient d'être indiqué, toutes les solutions de $F=0$.

Donc, pour intégrer une équation aux dérivées partielles du premier ordre, il suffit d'en connaître une famille de solutions à deux paramètres; et comme une telle famille détient la propriété de déterminer *complètement* l'équation, on lui donne le nom d'*intégrale complète*. Les surfaces enveloppes de familles à un paramètre prélevées sur l'intégrale complète constituent l'*intégrale générale*. Enfin, l'enveloppe de toutes les surfaces de l'intégrale complète, les deux paramètres demeurant indépendants, est l'*intégrale singulière*.

En résumé, on a le tableau suivant :

*intégrale complète* $\quad V(x, y, z, a, b)=0;$

*intégrale générale* $\quad \begin{cases} V(x, y, z, a, \varphi(a))=0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial a}+\dfrac{\partial V}{\partial \varphi(a)}\varphi'(a)=0; \end{cases}$ $\quad$ (éliminer $a$)

*intégrale singulière* $\quad \begin{cases} V(x, y, z, a, b)=0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial a}=0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial b}=0. \end{cases}$ $\quad$ (éliminer $a$ et $b$)

**265.** L'intuition géométrique nous apporte d'autres éléments. On voit par le tableau ci-dessus qu'on peut engendrer les surfaces de l'intégrale générale par les courbes de la famille à trois paramètres

$$V(x, y, z, a, b)=0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial a}+c\frac{\partial V}{\partial b}=0;$$

ces équations sont celles que nous avons écrites pour définir l'intégrale générale, au remplacement près de $\varphi(a)$ et $\varphi'(a)$ par $b$ et $c$. Notons maintenant qu'une de ces courbes peut appartenir à une infinité de surfaces intégrales, mais d'après le mode de génération par enveloppement, ces surfaces se raccorderont toujours le long de la courbe en question. Autrement dit, les coefficients $p$ et $q$ auront les mêmes valeurs pour ces différentes surfaces en chaque point de ces courbes : bien entendu, ces valeurs sont données par

$$\frac{\partial V}{\partial x}+p\frac{\partial V}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y}+q\frac{\partial V}{\partial z}=0.$$

Nous commençons maintenant à mieux nous orienter. Nous voyons par ce qui précède qu'il faudra faire intervenir simultanément, dans nos raisonnements ultérieurs, les cinq nombres $x$, $y$, $z$, $p$, $q$.

Cette remarque est d'une interprétation facile : nous cherchons à trouver des surfaces satisfaisant à l'équation $F=0$ où interviennent simultanément les cinq nombres $x$, $y$, $z$, $p$, $q$. Cette équation nous apparaît comme un mode de définition de ces surfaces qui participe à la fois du point de vue ponctuel, par la présence des coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point de la surface, et du point de vue tangentiel, par la présence des coefficients $p$ et $q$.

Or il ne nous est nullement interdit d'envisager un mode de génération surabondant de nos surfaces, par points et plans tangents simultanément donnés : cela revient à écrire cinq équations

$$(4) \quad x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v), \quad p=p(u, v), \quad q=q(u, v);$$

la seule restriction est que ces cinq fonctions des paramètres $u$ et $v$ devront satisfaire à la condition de compatibilité

$$(5) \qquad dz=p\,dx+q\,dy,$$

laquelle équivaut en réalité aux deux relations

$$(6) \qquad \frac{\partial z}{\partial u}=p\frac{\partial x}{\partial u}+q\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v}=p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Une surface intégrale, au lieu d'être pour nous le lieu d'un point ou l'enveloppe d'un plan, sera une famille à deux paramètres, déterminée par les équations (4), d'éléments de contact, soumis aux conditions (6), et satisfaisant en outre à l'équation (3).

Dans le même esprit nous allons introduire, sous le nom de *bandes caractéristiques*, des multiplicités à une dimension (n° 243) formées d'éléments de contact

$$x(u), \qquad y(u), \qquad z(u), \qquad p(u), \qquad q(u),$$

et ayant pour supports ponctuels les lignes de raccord précédemment mentionnées [1]. On aura donc, le long d'une bande caractéristique,

$$\frac{dz}{du}=p\frac{dx}{du}+q\frac{dy}{du}.$$

Dans le cas où l'on possède une intégrale complète, les bandes caractéristiques seront donc définies par les quatre équations

$$(7) \quad \begin{aligned} &V(x, y, z, a, b)=0, && \frac{\partial V}{\partial a}+c\frac{\partial V}{\partial b}=0, \\ &\frac{\partial V}{\partial x}+p\frac{\partial V}{\partial z}=0, && \frac{\partial V}{\partial y}+q\frac{\partial V}{\partial z}=0; \end{aligned} \qquad \text{(bandes caractéristiques sous forme finie)}$$

on voit en effet que, sous la seule hypothèse $\frac{\partial V}{\partial z}\neq 0$, les équations (7) entraînent $dz=p\,dx+q\,dy$, et par suite définissent bien des multiplicités. Elles donnent, par exemple, $y$, $z$, $p$, $q$ en fonction de $x$ (lorsqu'on peut prendre $x$ comme paramètre $u$).

---

[1] Les plans associés aux différents points de la ligne de raccord enveloppent une développable, qu'on appelle aussi *développable caractéristique*.

Puisque les bandes caractéristiques dépendent de trois paramètres [1], il est naturel de penser qu'on peut les définir, à partir de l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

elle-même, par un système d'équations différentielles ordinaires. Nous allons voir qu'il en est bien ainsi.

Soit une surface intégrale quelconque. Considérons l'un de ses éléments de contact (M, $\mathcal{P}$) formé du point M et du plan tangent $\mathcal{P}$ en ce point. Appelons, pour abréger le langage, *élément de contact intégral* tout élément de contact dont les cinq coordonnées sont liées par l'équation $F = 0$. Notons maintenant que tous les éléments de contact intégraux, formés par l'union du point M et d'un plan indéterminé contenant M, enveloppent un cône de sommet M.

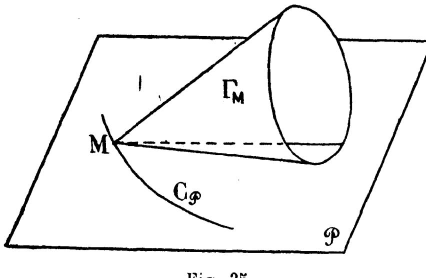


Fig. 35.

Ce cône $\Gamma_M$ s'appelle le *cône élémentaire*. Corrélativement, les éléments de contact intégraux, formés par l'union du plan $\mathcal{P}$ et d'un point indéterminé de ce plan, se répartissent sur une courbe $C_\mathcal{P}$ de ce plan, appelée *courbe élémentaire*. Si (M, $\mathcal{P}$) est un élément de contact intégral, il va de soi que le cône élémentaire $\Gamma_M$ est tangent au plan P, et que la courbe élémentaire $C_\mathcal{P}$ passe par le point M.

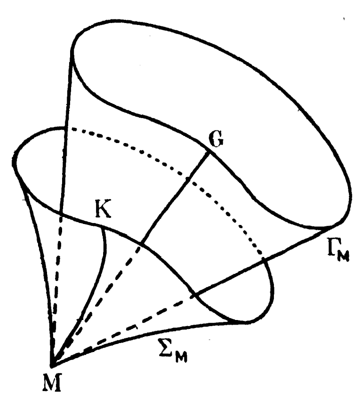


Fig. 36.

Étudions les relations entre une intégrale complète, les caractéristiques, les cônes $\Gamma_M$ et les courbes $C_\mathcal{P}$. Par un point M il passe une infinité de surfaces de l'intégrale complète, formant une famille $\varphi$ à un paramètre, laquelle admet pour enveloppe une surface intégrale $\Sigma_M$, ayant M pour point conique : en effet, les plans tangents en M aux surfaces précédentes enveloppent le cône $\Gamma_M$, qui est par suite le cône des tangentes à $\Sigma_M$.

---

(1) Il importe de noter que si, à l'intégrale *complète* initiale, on en substitue une nouvelle, formée par une famille à deux paramètres prélevée sur l'intégrale générale, le système des bandes caractéristiques reste inaltéré. On pourrait le vérifier par un calcul direct, mais c'est une conséquence immédiate de la définition des bandes caractéristiques, et cela résultera encore *a posteriori* de l'étude que nous allons faire.

Au point de vue de la génération par éléments de contact, on peut obtenir $\Sigma_M$ en groupant les bandes caractéristiques issues de M sur les diverses surfaces de la famille $\varphi$ [1]. Portons notre attention sur les *lignes* caractéristiques [2] : chacune d'elles MK nous représente une courbe de contact de $\Sigma_M$ et d'une surface de la famille $\varphi$. Or si nous substituons à la famille $\varphi$ des surfaces $V=0$ passant par M la famille $\varpi$ des plans tangents en M, à chaque surface $\varphi$ correspond un plan $\varpi$ bien déterminé; en outre, à l'enveloppe $\Sigma_M$ de la famille $\varphi$ se substitue le cône enveloppe $\Gamma_M$ de la famille $\varpi$, à la courbe MK de contact d'une surface $V=0$ de la famille $\varphi$ avec $\Sigma_M$ se substitue la génératrice MG de contact du plan tangent en M à $V=0$ avec le cône $\Gamma_M$. Le système des déplacements différentiels qu'on peut effectuer à partir de M étant le même sur la surface $\Sigma_M$ que sur le cône $\Gamma_M$, on en déduit que MK et MG auront en M un élément linéaire commun, autrement dit que la génératrice MG sera la tangente en M à la courbe MK.

C'est ce qu'il est facile de confirmer analytiquement. Soient

$$\varphi(x, y, z, \lambda) = 0$$

les surfaces de la famille $\varphi$; on a, quel que soit $\lambda$, en appelant $(x_0, y_0, z_0)$ les coordonnées de M,

$$\varphi(x_0, y_0, z_0, \lambda) \equiv 0 \qquad \text{et par suite} \qquad \varphi'_\lambda(x_0, y_0, z_0, \lambda) \equiv 0.$$

Les deux équations

$$\varphi(x, y, z, \lambda) = 0, \qquad \varphi'_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0,$$

représentent la courbe MK. Définissons maintenant la famille des plans tangents

$$(\varpi) \qquad (x - x_0)\varphi'_{x_0} + (y - y_0)\varphi'_{y_0} + (z - z_0)\varphi'_{z_0}(x_0, y_0, z_0, \lambda) = 0;$$

pour chaque valeur de $\lambda$, nous obtenons une surface $\varphi$ et un plan $\varpi$. Dérivons l'équation $(\varpi)$ par rapport à $\lambda$ : nous obtenons

$$(\varpi') \qquad (x - x_0)\varphi''_{x_0\lambda} + (y - y_0)\varphi''_{y_0\lambda} + (z - z_0)\varphi''_{z_0\lambda} = 0.$$

Les équations $(\varpi)$ et $(\varpi')$ définissent la génératrice MG du cône $\Gamma$. La vérification de la tangence de MG et de MK consiste alors simplement à remarquer que $\varpi$ et $\varpi'$ sont les plans tangents aux deux surfaces $\varphi = 0$, $\varphi'_\lambda = 0$, dont l'intersection détermine MK.

Énonçons la conclusion essentielle qui se dégage de l'étude précédente :

*La tangente à la courbe d'une bande caractéristique en un point* M, *ou mieux, pour un élément de contact* (M, $\mathfrak{L}$) *de cette bande, est la génératrice de contact du plan* $\mathfrak{L}$ *de cet élément avec le cône* $\Gamma_M$ *correspondant au point* M.

---

[1] A ce titre, la surface $\Sigma_M$ admettant M pour point conique est indépendante du choix de telle ou telle intégrale complète.

[2] Indépendamment des développables, qui, unies avec elles, constituent nos bandes caractéristiques.

Il est facile d'établir corrélativement le résultat suivant (voir p. 250 la justification de cette corrélation) :

*La génératrice d'une développable caractéristique contenue dans le plan tangent* $\mathcal{L}$ *à cette développable est la tangente à la courbe* $C_{\mathcal{L}}$ *menée par le point* M qui s'associe au plan $\mathcal{L}$ pour donner un élément de contact de la bande caractéristique.

Mais nous ne signalons cet énoncé que pour montrer la dualité qui s'exerce dans la question, dualité que DARBOUX a parfaitement mise en lumière [1]. La première proposition, jointe à quelques remarques simples, nous suffira pour obtenir rapidement les équations différentielles des multiplicités caractéristiques.

**266.** Cherchons celles de ces multiplicités qui se trouvent sur une certaine surface intégrale S. Alors, entre tous les éléments (M, $\mathcal{L}$) d'une telle multiplicité, nous avons nécessairement la relation

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{8}$$

Considérons la *courbe* de la multiplicité : quels sont les paramètres directeurs $dx$, $dy$, $dz$ de la tangente? Il nous faut prendre la génératrice de contact MG du cône $\Gamma_M$ et du plan $\mathcal{L}$. Or ce cône est l'enveloppe des plans

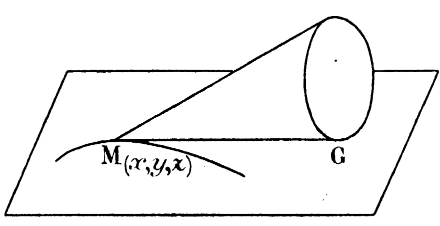



Fig. 37.

$$Z - z = P(X - x) + Q(Y - y), \tag{9}$$

où P et Q sont liés par la relation

$$F(x, y, z, P, Q) = 0, \tag{10}$$

qui s'exerce entre les pentes de tous les éléments de contact intégraux issus de $M(x, y, z)$. Nous aurons l'enveloppe de la famille (9), dépendant des paramètres P et Q liés par (10), en associant à cette relation l'équation (n° 206)

$$\frac{X - x}{F'_P} = \frac{Y - y}{F'_Q}.$$

D'ailleurs les valeurs de P et de Q pour lesquelles nous cherchons la génératrice de contact sont les pentes $P = p$ et $Q = q$ du plan tangent à S au point M. Nous aurons donc

$$\frac{dx}{F'_p} = \frac{dy}{F'_q}. \tag{11}$$

Si la surface intégrale S est déterminée, l'équation différentielle (11) nous

(1) Mémoire sur les *Solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

donne toutes les courbes caractéristiques qu'elle contient. Mais ce qui importe, c'est justement d'obtenir, non seulement ces courbes, mais encore les multiplicités *indépendamment des surfaces supports;* pour déterminer de ce nouveau point de vue la tangente à une courbe caractéristique, il nous faut donc écrire en outre

$$dz = p\,dx + q\,dy; \tag{12}$$

le système des équations (11) et (12) équivaut alors au suivant, qui fournit des valeurs proportionnelles à $dx$, $dy$, $dz$,

$$\frac{dx}{F'_p} = \frac{dy}{F'_q} = \frac{dz}{pF'_p + qF'_q}.$$

Mais il faut encore exprimer la *loi de variation du plan tangent*, c'est-à-dire de $p$ et de $q$. Rappelons-nous que le long d'une bande caractéristique, il y a *raccord* d'une infinité de surfaces intégrales. Admettons ici [1] qu'il existe sur ces surfaces des dérivées secondes continues $r$, $s$, $t$ et cherchons comment elles se calculent pour un élément de contact de notre bande caractéristique. Les éléments de cette bande forment une famille à un paramètre

$$x(u), \quad y(u), \quad z(u), \quad p(u), \quad q(u),$$

vérifiant identiquement l'équation (8). Donc la dérivée du premier membre par rapport à $u$ est aussi identiquement nulle, et nous avons

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz + F'_p dp + F'_q dq = 0. \tag{13}$$

Mais cette relation (13) est encore vérifiée si au lieu de se déplacer seulement le long de notre bande caractéristique, on se déplace arbitrairement sur la surface intégrale S; elle se décompose donc en deux égalités,

$$\left\{ \begin{aligned} F'_x + pF'_z + rF'_p + sF'_q &= 0, \\ F'_y + qF'_z + sF'_p + tF'_q &= 0, \end{aligned} \right. \tag{14}$$

qu'on obtient en remplaçant dans l'équation (13), $dz$, $dp$, $dq$ par $pdx + qdy$, $rdx + sdy$, $sdx + tdy$ respectivement, et égalant séparément à zéro les coefficients de $dx$ et $dy$.

Ces égalités doivent être satisfaites par $r$, $s$, $t$ sur chaque élément de contact de S, et aussi en particulier sur chaque élément de contact de la bande. Le long de celle-ci, posons, en appelant $u$ le paramètre spécifique d'un élément,

$$\frac{dx}{F'_p} = \frac{dy}{F'_q} = \frac{dz}{pF'_p + qF'_q} = du;$$

nous pourrons écrire les équations (14), en y remplaçant $F'_p$ par $\frac{dx}{du}$ et $F'_q$ par $\frac{dy}{du}$,

(1) Cela n'a pas d'importance au point de vue intuitif où nous nous plaçons.

et en notant que $rdx + sdy = dp$, et $sdx + tdy = dq$, sous la forme

$$F'_x + pF'_z + \frac{dp}{du} = 0,$$

$$F'_y + qF'_z + \frac{dq}{du} = 0;$$

ces relations déterminent la variation du plan tangent en donnant $\frac{dp}{du}$ et $\frac{dq}{du}$.

Finalement, nous avons donc, *sous forme différentielle, le système des bandes caractéristiques*

$$(15) \quad \frac{dx}{F'_p} = \frac{dy}{F'_q} = \frac{dz}{pF'_p + qF'_q} = -\frac{dp}{F'_x + pF'_z} = -\frac{dq}{F'_y + qF'_z} = du,$$

dont l'importance est fondamentale. Sur ce système apparaît nettement l'autonomie des bandes caractéristiques vis-à-vis des surfaces intégrales. Autrement dit, le système de multiplicités déterminé *sous forme finie* par les équations (7) est indépendant du choix de l'intégrale complète qui a servi à le définir.

Remarques. — I. D'après le système (15), il semble que les bandes caractéristiques dépendent non de trois, mais de quatre constantes arbitraires (lorsqu'on supprime $= du$, il reste en effet quatre équations différentielles). Cela tient simplement à la circonstance suivante : nous aurions obtenu par le calcul précédent le même système (15) si, au lieu de considérer l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

nous avions pris la suivante,

$$(16) \quad F(x, y, z, p, q) = h,$$

où $h$ désigne une constante quelconque (car la présence de cette constante ne modifie aucune des dérivées $F'_x, \ldots, F'_q$). On vérifie immédiatement que la relation (16) donne justement une intégrale première de (15), car le système (15) entraîne bien

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz + F'_p dp + F'_q dq = 0.$$

Mais alors $h$ est une des quatre constantes provenant de l'intégration de (15). Si nous prenons $h = 0$ pour nous conformer à l'hypothèse originelle $F = 0$, il nous restera seulement, dans les équations des bandes caractéristiques, trois paramètres.

II. Il résulte de ce qui précède que l'intégration d'une équation de la forme

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

peut être essayée par deux méthodes différentes.

1° *Méthode de* Cauchy : *intégration du système différentiel des caractéristiques.* Nous verrons en effet plus loin que l'on peut obtenir toute surface intégrale en associant convenablement une famille à un paramètre de carac-

téristiques. En particulier, pour résoudre le *problème* de Cauchy relativement à une courbe donnée Γ (non caractéristique), c'est-à-dire pour trouver une surface intégrale passant par Γ, on associera les bandes caractéristiques qui ont en chaque point de Γ un élément de contact dont le plan contient la tangente à Γ.

2° *Méthode de* LAGRANGE : *recherche d'une intégrale complète.* Nous avons en effet indiqué que d'une telle intégrale on pouvait déduire toutes les autres. En particulier, pour résoudre le problème de Cauchy relativement à une courbe donnée Γ (non caractéristique), on associera à chaque point de Γ une surface de l'intégrale complète tangente à Γ en ce point : on aura ainsi une famille de surfaces à un paramètre dont l'enveloppe sera la surface intégrale cherchée.

Ces deux méthodes ont des liens très intimes. Nous avons vu que la connaissance d'une intégrale complète permettait d'écrire immédiatement l'intégrale générale du système (15). Nous allons maintenant chercher de quelle utilité peut être, pour la détermination d'une intégrale complète, la connaissance d'une intégrale première du système différentiel des caractéristiques.

**267. Recherche d'une intégrale complète.** — Partons de l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

pour laquelle nous sommes en mesure d'écrire le système (15) des caractéristiques. Comment pourrons-nous obtenir une intégrale complète?

Supposons réalisée une telle famille : chaque surface qui la compose est constituée par le groupement de multiplicités caractéristiques. Or un mode de groupement très simple est celui qui se présente naturellement lorsqu'on connaît une intégrale première

$$\Phi(x, y, z, p, q) = k$$

(autre que $F = h$) [1] du système des caractéristiques; le groupement s'établit alors de lui-même entre les multiplicités qui correspondent à une même valeur de $k$.

Nous allons montrer effectivement que *si l'on associe les deux équations*

$$(17) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0, \qquad \Phi(x, y, z, p, q) = k,$$

*leur système équivaut à une équation aux différentielles totales complètement intégrable. La solution*

$$U(x, y, z, k) = l$$

*de cette équation donne alors une intégrale complète.*

En effet, cherchons la condition d'intégrabilité du système $F = 0$, $\Phi = k$. Ces deux équations définissent $p$ et $q$ en fonctions implicites de $x$, $y$, $z$, soient

$$p = p(x, y, z), \qquad q = q(x, y, z).$$

[1] C'est-à-dire telle que le déterminant fonctionnel $\frac{D(F, \Phi)}{D(p, q)}$ ne soit pas nul.

Ces fonctions étant connues, il nous reste à intégrer l'équation aux différentielles totales

(18) $$dz = p(x, y, z)\,dx + q(x, y, z)\,dy.$$

La condition d'intégrabilité s'obtient en égalant la dérivée par rapport à $y$ de la fonction composée $p[x, y, z(x, y)]$ et la dérivée par rapport à $x$ de $q[x, y, z(x, y)]$, ce qui donne

(19) $$\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial z};$$

or, pour définir les dérivées partielles qui figurent dans (19), nous devons adjoindre à cette équation les suivantes, obtenues par dérivation des relations (17) en $x$, $y$, $z$,

$$(20)\ \left\{\begin{aligned} &F'_x + F'_p\frac{\partial p}{\partial x} + F'_q\frac{\partial q}{\partial x} = 0,\\ &F'_y + F'_p\frac{\partial p}{\partial y} + F'_q\frac{\partial q}{\partial y} = 0,\\ &F'_z + F'_p\frac{\partial p}{\partial z} + F'_q\frac{\partial q}{\partial z} = 0,\end{aligned}\right. \qquad (21)\ \left\{\begin{aligned} &\Phi'_x + \Phi'_p\frac{\partial p}{\partial x} + \Phi'_q\frac{\partial q}{\partial x} = 0,\\ &\Phi'_y + \Phi'_p\frac{\partial p}{\partial y} + \Phi'_q\frac{\partial q}{\partial y} = 0,\\ &\Phi'_z + \Phi'_p\frac{\partial p}{\partial z} + \Phi'_q\frac{\partial q}{\partial z} = 0;\end{aligned}\right.$$

des premières équations de chaque groupe, nous tirons $\frac{\partial p}{\partial x}$ et $\frac{\partial q}{\partial x}$, des secondes $\frac{\partial p}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial y}$, des troisièmes $\frac{\partial p}{\partial z}$ et $\frac{\partial q}{\partial z}$. En portant ces résultats dans (19), nous obtenons finalement la condition suivante :

(21) $$\Phi'_x F'_p + \Phi'_y F'_q + \Phi'_z(pF'_p + qF'_q) - \Phi'_p(F'_x + pF'_z) - \Phi'_q(F'_y + qF'_z) = 0,$$

de la réalisation de laquelle dépend l'intégrabilité de l'équation (18). Or, par hypothèse $\Phi = k$ est une intégrale première du système (15). On a donc, en vertu des équations (15),

$$\Phi'_x dx + \ldots + \Phi'_q dq = 0.$$

Mais, en remplaçant $dx, \ldots, dq$ par les dénominateurs de (15), on trouve que (21) est vérifiée, et c'est précisément là ce qu'il s'agissait d'établir.

**268. Marche à suivre dans les problèmes.** 1[er] Cas. — *Les conditions dans lesquelles l'équation est proposée font connaître d'emblée une intégrale complète*

$$V(x, y, z, a, b) = 0;$$

il est alors superflu d'effectuer d'autres opérations que des dérivations pour obtenir, soit l'intégrale générale de $F = 0$, soit l'ensemble des bandes caractéristiques.

Soient $$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

les équations d'une courbe $\Gamma$. Pour résoudre le problème de Cauchy relative

ment à cette courbe, il nous faut chercher les surfaces de l'intégrale complète qui sont tangentes à Γ. Les paramètres $a$ et $b$ doivent alors être choisis de telle sorte que l'équation

$$V[x(t), y(t), z(t), a, b] \equiv V_1(t, a, b) = 0$$

ait une racine double en $t$, c'est-à-dire que les équations

$$V_1(t, a, b) = 0, \qquad \frac{\partial V_1}{\partial t} = 0$$

soient compatibles. L'élimination de $t$ entre ces deux équations fait connaître la relation à établir entre $a$ et $b$ pour avoir une famille à un paramètre de surfaces intégrales tangentes à Γ : il n'y a plus qu'à prendre l'enveloppe de cette famille.

2[e] Cas. — On donne l'équation $F(x, y, z, p, q) = 0$ sans qu'*a priori* on aperçoive une intégrale complète. On forme alors le système

$$\frac{dx}{F'_p} = \frac{dy}{F'_q} = \frac{dz}{pF'_p + qF'_q} = -\frac{dp}{F'_x + pF'_z} = -\frac{dq}{F'_y + qF'_z},$$

et on cherche une intégrale première (autre que $F = C^{te}$). Soit $\Phi = k$ cette intégrale. On résout en $p$ et $q$ les équations

$$F = 0, \qquad \Phi = k,$$

et on obtient une équation

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

complètement intégrable : son intégrale générale fournit une intégrale complète. A partir de ce moment, on est ramené au premier cas, et toute question complémentaire (recherche des bandes caractéristiques, problème de Cauchy, etc...) se résout par des calculs de dérivation.

Considérations d'invariance. — Lorsque l'équation est donnée sans indication connexe, la recherche d'une intégrale première du système (15) est plus ou moins hasardeuse; on s'efforce de profiter des simplifications présentées par l'équation particulière proposée.

Mais très souvent l'équation provient d'un problème de géométrie, consistant à déterminer des surfaces connaissant une relation géométrique ($\mathcal{R}$) entre un point et le plan tangent en ce point[1]. Il va de soi qu'on aura intérêt à tirer parti de considérations d'invariance.

Supposons, pour fixer les idées, que la relation ($\mathcal{R}$) soit telle que si un élément de contact (M, $\mathfrak{L}$) la vérifie, il en soit de même :

**1° de tous les éléments de contact homothétiques, dans un rapport quelconque, relativement au point O;**

(1) Relations qui peuvent s'exprimer par l'intermédiaire d'éléments bien déterminés lorsque les deux précédents, point et plan tangent, sont connus, par exemple par l'intermédiaire de la normale.

2° de tous les éléments de contact qui se déduisent du premier par une rotation autour de $Oz$.

Dès lors, il suffira de connaître une seule surface intégrale (distincte d'un cône de sommet O ou d'une surface de révolution d'axe $Oz$) pour en déduire, par le jeu des deux transformations précédentes, une intégrale complète. Posons en effet

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = \rho \cos\theta;$$

si la surface définie en coordonnées sphériques par

$$\rho = F(\theta, \varphi)$$

est une intégrale particulière, nous aurons l'intégrale complète

$$\rho = \beta F(\theta, \varphi - \alpha) \text{ (1)};$$

l'équation aux dérivées partielles proposées, en coordonnées sphériques, se réduira donc à la forme très simple

$$\Psi\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \theta}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}, \theta\right) = 0;$$

nous avons à considérer une équation définissant la fonction inconnue $\log \rho$ des deux variables $\theta$ et $\varphi$; on obtient ses multiplicités caractéristiques par le même processus que précédemment. Posons pour abréger

$$\log \rho = \omega, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = u, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = v;$$

nous avons l'équation

$$\Psi\left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta}, \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}, \theta\right) = 0;$$

le système différentiel des caractéristiques sera

$$\frac{d\theta}{\Psi'_u} = \frac{d\varphi}{\Psi'_v} = \frac{d\omega}{u\Psi'_u + v\Psi'_v} = \frac{-du}{\Psi'_\theta} \qquad \text{et} \qquad dv = 0.$$

Nous obtenons de suite l'intégrale première

$$v = m, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = m,$$

à laquelle nous devons adjoindre l'équation $\Psi = 0$, résolue par rapport à $u$, et où $v$ aura été remplacé par $m$, ce qui donne une équation de la forme

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = f(m, \theta),$$

---

(1) En somme nous profitons des circonstances simplificatrices suivantes : il existe un groupe continu de transformations à deux paramètres laissant invariant le système de tous les éléments de contact intégraux, et, de plus, ce groupe est tel qu'en substituant aux coordonnées cartésiennes $x, y, z$ de nouvelles coordonnées appropriées $\omega = \log \rho$, $\theta$, $\varphi$, on puisse ramener les équations du groupe à la forme $\omega_1 = \omega + \lambda$, $\varphi_1 = \varphi + \mu$, $\theta_1 = \theta$, $\lambda$ et $\mu$ désignant (au lieu de $\log \beta$ et de $\alpha$) les deux paramètres du groupe.

et, en réunissant,

$$\frac{d\rho}{\rho} = md\varphi + f(m, \theta)d\theta,$$

d'où l'intégrale complète[1]

$$\rho = \beta e^{m\varphi + \int f(m, \theta)d\theta},$$

qu'on obtient par une quadrature.

On pourrait multiplier les exemples du même genre. Le lecteur qui a bien suivi les développements consacrés dans l'*Initiation* aux équations différentielles n'aura aucune peine à utiliser ce genre de considérations.

**269. Exercices et exemples divers.** — I. *Intégrer l'équation*

(1) $$z - px - qy = f(p, q).$$

Si nous formons le système des caractéristiques, nous aurons à calculer notamment $F'_x + pF'_z = -p + p = 0$; nous aurons donc $dp = 0$, ce qui donne l'intégrale première $p = \alpha$.

On aura donc à intégrer

(2) $$dz = \alpha dx + q(x, y, z)dy,$$

$q(x, y, z)$ étant défini implicitement par

(3) $$qy + f(\alpha, q) = z - \alpha x.$$

Si nous différentions l'équation (3) en tenant compte de (2), il vient

$$(y + f'_q)dq = 0;$$

donc si l'on écarte la solution $y + f'_q = 0$, on obtient $q = \beta$, où $\beta$ est une nouvelle constante; l'intégrale complète cherchée est alors

$$z - \alpha x - \beta y = f(\alpha, \beta).$$

Autrement dit, toute équation de la forme (1) admet *une intégrale complète formée d'une famille de plans.* L'intégrale singulière est la surface $\Sigma$ qu'on obtient pour enveloppe de ces plans quand on laisse indépendants les deux paramètres $\alpha$ et $\beta$ : elle a pour équations

$$x + f'_\alpha = 0, \qquad y + f'_\beta = 0, \qquad z + \alpha f'_\alpha + \beta f'_\beta - f(\alpha, \beta) = 0.$$

L'intégrale générale se compose des développables circonscrites à $\Sigma$. Enfin une bande caractéristique est formée par une droite quelconque $\Delta$ tangente à $\Sigma$ et le plan tangent à $\Sigma$ qui contient $\Delta$.

Réciproquement, toute équation qui admet une intégrale complète formée de plans est du type (1). Nous trouvons, dans cet ordre d'idées, une nouvelle généralisation de l'équation de Clairaut[2].

---

[1] Cette intégrale n'est pas celle dont nous nous sommes servis pour prévoir la forme de l'équation, mais cela nous importe peu. Il nous sera toujours facile, en ayant déduit l'intégrale générale, de revenir à une intégrale complète du type indiqué en premier lieu, en appliquant à une surface de l'intégrale générale, dénuée de propriétés d'invariance, l'ensemble des transformations de notre groupe.

[2] Nous avons déjà signalé dans un exercice une généralisation d'un autre genre, concernant les systèmes différentiels.

II. *Intégrer l'équation*

(1) $$f(x, p) = g(y, q).$$

*Même problème pour les équations*

(2) $$f\left(x, \frac{p}{z}\right) = g\left(y, \frac{q}{z}\right) \quad \textit{et} \quad (3) \quad f(x, pz) = g(y, qz).$$

Le système caractéristique de (1) admet l'intégrale première $f(x, p) = \alpha$. En portant dans (1), on a donc aussi $g = \alpha$. La première de ces équations donne $p$ en fonction de $x$, la seconde donne $q$ en fonction de $y$, et l'intégration s'achève par deux quadratures,

$$z = \int_0^x p(\alpha, x)dx + \int_0^y q(\alpha, y)dy + \beta.$$

Les équations (2) et (3) se ramènent respectivement à (1) quand on pose $z = e^{\iota}$ ou $z^2 = Z$. Par des changements de variables, on pourra ainsi déduire de (1) des types variés d'équations faciles à intégrer.

III. *Intégrer les équations aux dérivées partielles possédant le caractère suivant : il existe une direction fixe de plans* P *telle que si la droite joignant les points* $M_1$ *et* $M_2$ *est parallèle à ces plans, les cônes* $\Gamma_{M_1}$ *et* $\Gamma_{M_2}$ *ne diffèrent que par une translation.*

Nous prendrons le plan $xOy$ parallèle aux plans de l'énoncé. Par hypothèse, les coefficients de pente $p$, $q$ d'un élément de contact intégral sont liés par la même relation aux points de même $z$. L'équation aux dérivées partielles sera donc de la forme (1)

$$f(z, p, q) = 0.$$

Si l'on connaît une intégrale particulière $z = \varphi(x, y)$, il est clair que $z = \varphi(x - \alpha, y - \beta)$ sera une intégrale complète. Si nous écrivons le système caractéristique, nous trouvons la combinaison

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q},$$

d'où $$q = mp \text{ (2)}.$$

En portant dans l'équation proposée, on aura $p$ en fonction de $z$

$$p = \psi(z, m), \qquad q = m\psi(z, m).$$

On devra donc intégrer l'équation

$$\frac{dz}{\psi(z, m)} = dx + mdy,$$

opération qui s'effectue par une quadrature. Nous trouverons ainsi (circonstance déjà rencontrée) une intégrale complète d'un type différent du type prévu.

Son équation s'écrit en effet

$$x + my + n = \varphi(z, m);$$

elle représente une famille de cylindres ayant leurs génératrices parallèles au plan $xOy$. Imprimer à l'un de ces cylindres une *translation* parallèle à ce plan revient à laisser

---

(1) Pareillement une équation ne contenant que $x$, $p$, $q$ ou que $y$, $p$, $q$ offrirait une particularité géométrique analogue, à l'échange près des plans de coordonnées. On pourra chercher comme exercice ce que devient l'équation $f(z, p, q) = 0$ lorsqu'on pose $z = X$, $y = Y$, $x = Z$ et $P = \frac{\partial Z}{\partial X}$, $Q = \frac{\partial Z}{\partial Y}$.

(2) L'intégrale première $q = mp$ donne des surfaces dont le plan tangent reste parallèle à une droite fixe, donc des surfaces cylindriques.

$m$ constant et à faire varier $n$ seulement : on n'a donc pas ainsi une famille de surfaces intégrales à *deux* paramètres. Mais cela n'a aucune importance : ayant trouvé l'intégrale générale au moyen des cylindres précédents, on n'aura aucune difficulté, pour le cas où la chose serait demandée, à choisir une intégrale particulière $z = \varphi(x, y)$ telle que la famille $z = \varphi(x-\alpha, y-\beta)$ dépende effectivement de deux paramètres et fournisse une intégrale complète du type indiqué tout d'abord.

IV. *Trouver une surface dont les normales rencontrent la courbe*

$$(1) \qquad X = f(Z), \qquad Y = g(Z).$$

Les équations de la normale sont

$$(2) \qquad X - x + p(Z - z) = 0, \qquad Y - y + q(Z - z) = 0.$$

Écrivons que les équations (1) et (2) ont une solution commune en X, Y, Z, ou encore que les équations

$$f(Z) + pZ = x + pz, \qquad g(Z) + qZ = y + qz$$

ont une solution commune en Z. Cette élimination nous fournira l'équation cherchée. Aucun calcul n'est nécessaire pour l'intégrer, car les sphères centrées sur la courbe (1) donnent immédiatement une intégrale complète. Le problème ainsi résolu peut s'énoncer encore : *trouver toutes les congruences de normales dont une nappe de la surface focale se réduit à la courbe* (1).

On établira aisément que les courbes caractéristiques sont des cercles et les développables caractéristiques des cônes de révolution.

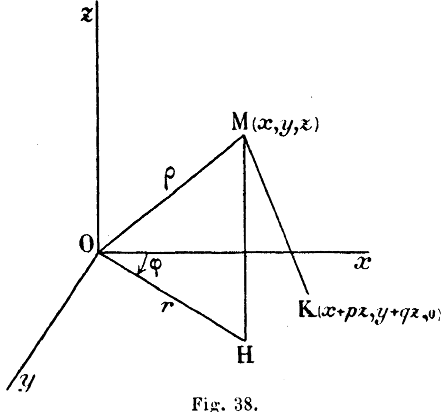


Fig. 38.

V. *Trouver une surface telle que la portion* MK *de la normale comprise entre le pied* M *de cette normale et sa trace* K *sur le plan* $xOy$ *soit vue de* O *sous un angle constant* $\alpha$.

Supposons connue une surface intégrale. Toute autre surface qui s'en déduit soit par rotation autour de $Oz$, soit par une homothétie de centre O, est encore une intégrale.

Nous aurons donc intérêt à opérer en coordonnées sphériques, ou tout au moins dans un système propre à mettre facilement en évidence le caractère d'invariance que nous venons d'indiquer : il est clair qu'il en est ainsi lorsqu'on prend pour coordonnées la distance $OM = \rho$ et les deux coordonnées polaires $(\varphi, r)$ de la projection H du point M sur le plan $xOy$.

Or nous allons être conduits d'une manière naturelle à adopter ce mode de détermination d'un point. Si nous exprimons la condition de l'énoncé en coordonnées cartésiennes, nous trouverons l'équation suivante :

$$[x(x+pz) + y(y+qz)]^2 = \cos^2\alpha\,(x^2+y^2+z^2)\,[(x+pz)^2 + (y+qz)^2].$$

Conservons provisoirement les deux variables indépendantes $x$, $y$ et substituons à $z$ la fonction inconnue

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

d'où

$$\rho\frac{\partial\rho}{\partial x}=x+pz,$$

$$\rho\frac{\partial\rho}{\partial y}=y+qz.$$

L'équation à intégrer s'écrira

$$\left(x\frac{\partial\rho}{\partial x}+y\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2=\rho^2\cos^2\alpha\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2\right];$$

dans le système de coordonnées ($\varphi$, $r$, $\rho$) elle devient donc

$$r^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)^2=\rho^2\cos^2\alpha\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2\right],$$

ou

$$(r^2-\rho^2\cos^2\alpha)\left(\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)^2=\frac{\rho^2}{r^2}\cos^2\alpha\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2,$$

d'où

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}\sqrt{r^2-\rho^2\cos^2\alpha}=\pm\frac{\rho}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\cos\alpha.$$

Nous ne pousserons pas le calcul plus loin, laissant ce soin au lecteur. Nous voulons seulement attirer son attention sur le point suivant : l'équation du problème n'est ici qu'une équation linéaire en $p$ et $q$, ce caractère étant camouflé par une élévation au carré. En effet, l'équation transformée peut être rendue linéaire (nous venons de le montrer) en $\frac{\partial\rho}{\partial r}$ et $\frac{\partial\rho}{\partial\theta}$. Or il est géométriquement évident que ce caractère (qui exprime que les surfaces intégrales sont tangentes en chaque point au vecteur d'un certain champ) ne dépend nullement des coordonnées adoptées; s'il se produit en coordonnées $\rho$, $r$, $\varphi$, il se traduira aussi bien en coordonnées cartésiennes, sphériques, semi-polaires, ... ou dans tout autre système [1].

Ainsi apparaît une fois de plus l'utilité des considérations d'invariance.

Naturellement, la théorie de l'intégration des équations $F(x, y, z, p, q)=0$ reste applicable aux équations linéaires, c'est-à-dire permet de retrouver les résultats que nous avons déjà donnés pour ces équations. Nous reviendrons un peu plus loin sur la classe spéciale qu'elles forment dans la famille de toutes les équations du premier ordre, classe pour laquelle le cône élémentaire se réduit à une droite.

VI. *Trouver les surfaces telles que l'on ait* $\overline{OM}^2=f(\overline{OP}^2)$, *en désignant par* P *la projection de l'origine sur le plan tangent en* M.

Nous obtenons une équation de la forme

$$x^2+y^2+z^2=f\left[\frac{(px+qy-z)^2}{1+p^2+q^2}\right].$$

Supposons qu'on connaisse une surface intégrale S. Alors nous connaîtrons de ce fait non seulement une intégrale complète, mais même une famille de surfaces intégrales dépendant de trois paramètres, à savoir toutes celles qui se déduisent de la première par une rotation arbitraire autour de O. Il nous est évidemment loisible d'obtenir une intégrale complète composée de surfaces $\Sigma$ dont chacune soit de révo-

(1) A une position du point M correspondent ici une infinité de positions du point K réparties sur deux droites $O\Delta_1$ et $O\Delta_2$ du plan $xOy$ telles que $\widehat{MO\Delta_1}=\widehat{MO\Delta_2}=\alpha$. Prenons l'une de ces droites, soit par exemple $O\Delta_1$. Alors, le plan tangent en M devra contenir la perpendiculaire en ce point au plan $MO\Delta_1$ : en chaque point de l'espace se trouve donc définie une direction et les surfaces cherchées sont les surfaces tangentes en chaque point à cette direction.

lution autour d'un axe passant par O; à chaque droite $O\Delta$ issue de O nous ferons donc correspondre une surface de révolution admettant cette droite comme axe, de manière qu'une rotation autour de O faisant coïncider les deux axes $O\Delta'$ et $O\Delta''$ fasse aussi coïncider les deux surfaces $\Sigma'$ et $\Sigma''$ correspondantes.

Il nous reste à déterminer, dans un plan arbitraire mené par $O\Delta$, la méridienne d'une surface $\Sigma$ de manière à satisfaire à la relation

$$\overline{OM}^2 = f(\overline{OP})^2.$$

Or en vertu de cette relation, cette méridienne sera une courbe intégrale de l'équation différentielle ordinaire

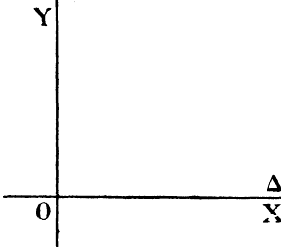



Fig. 39.

$$X^2 + Y^2 = f\left[\frac{(XY' - Y)^2}{1 + Y'^2}\right], \qquad (OX = O\Delta),$$

dont les courbes intégrales se déduisent de l'une d'entre elles par une rotation arbitraire autour de O; en coordonnées polaires, cette équation prend la forme

$$\rho^2 = f\left(\frac{\rho^4 d\omega^2}{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}\right),$$

d'où

$$d\omega = \varphi(\rho)\, d\rho$$

et s'intègre en conséquence par une quadrature. Naturellement, on pourra profiter de l'orientation arbitraire de $O\Delta$ par rapport à cette courbe pour simplifier les surfaces $\Sigma$ : par exemple, si la courbe en question admet un axe de symétrie, on pourra confondre $O\Delta$ avec cet axe.

Ces indications suffiront au lecteur qui cherchera à résoudre des cas particuliers. On prouvera aisément que les courbes caractéristiques sont des méridiennes, et les développables caractéristiques les cylindres qui les admettent pour sections droites.

VII. *Trouver les surfaces telles qu'en désignant par* TT' *la trace sur le plan* $xOy$ *du plan tangent en* M, *par* H *la projection de* M *sur le plan* $xOy$, *la distance du point* H *à la droite* TT' *soit une fonction connue de* OH.

Fig. 40.

La droite TT' ayant pour équation

$$pX + qY = px + qy - z,$$

l'équation du problème sera

$$(1) \qquad (px + qy - z)^2 = (p^2 + q^2)\,\varphi(x^2 + y^2).$$

On peut noter ici les caractères d'invariance suivants : si S est une surface intégrale, il en est de même de toute surface qui s'en déduit par rotation autour de $Oz$; en vertu de la définition du cône élémentaire (lequel a pour trace un cercle invariable du plan $xOy$ lorsque M décrit une parallèle à $Oz$), toute surface déduite de S par modification des cotes dans un rapport constant est encore une nouvelle intégrale.

Passons en coordonnées cylindriques $\theta$, $r$, $z$. Notre équation s'écrira

$$(2) \qquad \left(r\frac{\partial z}{\partial r} - z\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2\right]\varphi(r^2);$$

pour profiter de l'invariance par amplification constante des cotes, nous pourrons maintenant poser $\log z = \zeta$; notre équation deviendra ainsi

$$(3)\qquad \left(r\frac{\partial\zeta}{\partial r}-1\right)^2=\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2\right]\varphi(r^2).$$

On en tire
$$\frac{r^2}{\varphi}\left[\left(r\frac{\partial\zeta}{\partial r}-1\right)^2-\left(\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)^2\varphi\right]=\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2,$$

et on retombe sur une équation d'un type connu (n° 269, II). Quelle que soit la fonction $\varphi$, l'intégration est donc toujours ramenée à une quadrature.

On pourra, par exemple, étudier le cas où $\varphi(r^2) = Kr^2$, K désignant un coefficient positif constant.

**270. Extension de la notion d'intégrale et application.** — Avant d'exposer, même partiellement, une théorie synthétique des équations du premier ordre, il est nécessaire de rassembler certains des résultats acquis intuitivement et d'en souligner quelques caractères.

Le plus important de tous ceux-ci est la *dualité du problème*, c'est-à-dire la symétrie parfaite entre le rôle joué par les points d'une part, et le rôle joué par les plans tangents correspondants d'autre part, plus généralement entre les rôles joués respectivement par deux éléments corrélatifs quelconques. Cette dualité s'est introduite dès le début, en raison même du point de vue adopté : la condition

$$(1)\qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

est une équation propre à toutes les surfaces intégrales dans leur génération par éléments de contact; cette condition gouverne donc simultanément les coordonnées ponctuelles d'un point courant et les coordonnées tangentielles [1] du plan tangent correspondant. Que nous fassions une transformation corrélative (n° 10), à chaque système d'un point M et d'un plan $\mathcal{L}$ passant par M va correspondre un système formé d'un point P, dont les coordonnées ponctuelles seront les coordonnées tangentielles de $\mathcal{L}$, et d'un plan $\mathcal{M}$, dont les coordonnées tangentielles seront les coordonnées ponctuelles de M.

Autrement dit, nous définissons par l'échange des coordonnées ponctuelles et des coordonnées tangentielles deux *éléments de contact corrélatifs*.

Pour traduire ceci analytiquement, introduisons un système X, Y, Z, T de coordonnées homogènes du point $(x, y, z)$ et appelons U, V, W, H les coefficients de l'équation du plan tangent correspondant. La relation (1) équivaut à un système de la forme suivante :

$$(2)\qquad \Phi(X, Y, Z, T; U, V, W, H) = 0,$$

$$(3)\qquad UX + VY + WZ + HT = 0,$$

où $\Phi$ est homogène par rapport à X, Y, Z, T d'une part et à U, V, W, H

[1] Les coordonnées tangentielles d'un plan tangent sont proportionnelles à $p$, $q$, $-1$, $z - px - qy$.

de l'autre. Pour prouver cette équivalence, on remarquera que si l'on fait

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z, \quad T = 1,$$
$$U = p, \quad V = q, \quad W = -1,$$

il résultera de (3)

$$H = z - px - qy;$$

en portant ces valeurs dans (2), on obtiendra bien une équation de la forme (1). Inversement, si l'on part d'une équation de la forme (1), on peut écrire une infinité de systèmes de la forme [(2), (3)], déterminant la même famille d'éléments de contact que cette équation; l'indétermination de la fonction $\Phi$ provient seulement du fait qu'on a toute latitude pour la modifier en tenant compte de (3) [1].

Écrivons le *système corrélatif* de (2), (3) sous la forme

(2') $$\Phi(U, V, W, H; X, Y, Z, T) = 0,$$

(3') $$XU + YV + ZW + TH = 0.$$

Ce système équivaut à une équation aux dérivées partielles (1'), soit

(1') $$\mathcal{F}(x, y, z, p, q) = 0,$$

qui est la *corrélative* de (1). Comme nous étudions les équations du premier ordre en général, la théorie doit embrasser en même temps que telles ou telles équations celles qui en sont les corrélatives. C'est pour cette raison que la théorie de l'équation $F = 0$ doit présenter le caractère dualistique indiqué dès le début : en effet, quand nous parlons, par exemple, de la courbe élémentaire, relative à un plan $\mathfrak{L}$, pour l'équation $F = 0$, nous nous occupons tout aussi bien du cône élémentaire de sommet P corrélatif, pour l'équation $\mathcal{F} = 0$; si donc nous avions négligé la notion de courbe élémentaire, en parlant exclusivement des cônes élémentaires, dans l'ensemble de toutes les équations du premier ordre, la lacune ainsi commise se serait trouvée comblée *ipso facto*, mais à notre insu.

Ces considérations ont une grande importance. Elles nous prouvent qu'à chaque proposition de la théorie correspondra une proposition corrélative, traduite analytiquement par le même jeu de formules que la première, au remplacement près de l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

par sa corrélative

$$\mathcal{F}(x, y, z, p, q) = 0.$$

---

[1] On peut encore dire qu'il y a une infinité de manières d'écrire F sous la forme

$$f(x, y, z, p, q, z - px - qy).$$

Une fois F ramené à cette forme, on y remplace chacun des arguments par un rapport en posant

$$x = \frac{X}{T}, \ldots, p = -\frac{U}{W}, \ldots.$$

Il n'y a donc pas lieu de donner pour celle-ci une nouvelle démonstration. C'est ainsi que nous sommes assurés de l'exactitude du résultat suivant, déjà cité :

*Soit* (M, $\mathfrak{L}$) *un élément de contact d'une multiplicité caractéristique; la génératrice de la développable caractéristique contenue dans le plan* $\mathfrak{L}$ *coïncide avec la tangente en* M *à la courbe élémentaire* $C_{\mathfrak{L}}$ *contenue dans ce plan.*

En effet, cette proposition est la corrélative d'une autre, que nous avons démontrée explicitement.

**271.** Ces considérations nous amènent à une *conception généralisée de la notion d'intégrale* d'une équation telle que (1). Nous dirons avec SOPHUS LIE que les équations paramétriques

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v), \qquad p = p(u, v), \qquad q = q(u, v)$$

définissent une intégrale de (1) si ces fonctions remplissent les conditions suivantes :

1° elles annulent identiquement la fonction F;

2° elles représentent une multiplicité à deux dimensions.

La nature du support ponctuel (n° 243) de cette multiplicité n'importe pas et, à ce titre, des points et des lignes pourront jouer le rôle d'intégrales de l'équation (1) pourvu qu'on les considère comme supports ponctuels de multiplicités à deux dimensions formées d'éléments de contact intégraux. A côté des surfaces intégrales ordinaires, ces points et ces lignes sont parfois désignés sous le nom d'*intégrales au sens de* LIE.

Grâce à la définition de Sophus Lie, ces solutions dégénérescentes seront traitées sur le même pied que les autres.

Ce point de vue présente d'autres avantages, intimement liés aux précédents. Supposons qu'on passe de l'équation $F = 0$ à sa corrélative $\mathcal{F} = 0$, et imaginons qu'un certain plan soit une surface intégrale de $F = 0$. Nous pouvons dire maintenant, et cela aura un sens parfaitement clair, que le point corrélatif est une solution de $\mathcal{F} = 0$. Pareillement, si une développable est solution de $F = 0$, la ligne corrélative sera solution de $\mathcal{F} = 0$. Le point de vue de LIE est donc indispensable pour permettre d'appliquer aux équations $F = 0$ une transformation corrélative, ou plus généralement une transformation dualistique quelconque, ou plus généralement encore une de ces transformations faisant correspondre à un élément de contact $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ un élément analogue X, Y, Z, P, Q [1] de manière que la relation de compatibilité

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

entraîne

$$dZ = P\,dX + Q\,dY\ (^2).$$

[1] Par cinq formules donnant X, Y, Z, P, Q en fonction de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$.
[2] Ce sont les transformations de contact.

La théorie générale de ces transformations a été esquissée précédemment; nous nous bornerons ici à envisager des transformations dualistiques. Les plus usitées sont les transformations par polaires réciproques relatives à une certaine quadrique directrice Q dont le choix est sans importance, car en passant de la quadrique $Q_1$ à la quadrique $Q_2$, on passe d'une transformée dualistique $\mathcal{F}_1 = 0$, de $F = 0$, à une autre transformée dualistique $\mathcal{F}_2 = 0$, pouvant se déduire de $\mathcal{F}_1 = 0$ par une transformation ponctuelle projective. Lorsqu'on considère l'équation corrélative d'une équation donnée, on prend pour quadrique directrice la sphère imaginaire

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$

et c'est le choix le plus indiqué lorsqu'on formule le problème à l'aide du système (2), (3). Si on le formule par l'équation (1), on fait jouer un rôle particulier à $Oz$, et on traite $x$, $y$ symétriquement. Il est donc indiqué de faire jouer aussi à $Oz$ un rôle particulier dans la définition de la quadrique directrice Q, de supposer par exemple que celle-ci est de révolution autour de $Oz$. Nous prendrons donc avec Legendre, pour Q, le paraboloïde

$$2z = x^2 + y^2;$$

pour que deux points $(x, y, z)$ et $(X, Y, Z)$ soient conjugués par rapport à Q, il faut et il suffit que l'on ait

$$Z + z = xX + yY;$$

si $(x, y, z)$ demeure fixe, cette équation définit le plan polaire de ce point, dont les coefficients de pente seront donc

$$P = x, \qquad Q = y;$$

nous aurons par réciprocité, en considérant le pôle du plan précédent,

$$p = X, \qquad q = Y,$$

et finalement, nous sommes conduits à la *transformation de* Legendre

$$X = p, \qquad Y = q, \qquad Z = px + qy - z, \qquad P = x, \qquad Q = y;$$

la transformation considérée est une transformation de contact : par suite la relation

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

doit entraîner

$$dZ = P\,dX + Q\,dY.$$

C'est ce que le lecteur vérifiera aisément par le calcul.

**272**. Nous allons maintenant montrer, sur quelques exemples, le parti qu'on peut tirer de la transformation de **Legendre**.

Considérons une relation de la forme

(1) $$F(X, Y, Z) = 0;$$

c'est une équation aux dérivées partielles (au sens de SOPHUS LIE), mais elle ne contient pas P et Q. Son intégration est immédiate : chaque point $X_0$, $Y_0$, $Z_0$ tel que $F_0=0$ est une intégrale; il existe une famille à deux paramètres de telles intégrales; autrement dit, notre équation admet une intégrale complète formée de points; tous sont répartis sur la surface $F=0$. Établissons une relation entre les deux paramètres dont dépend la situation d'un de ces points sur $F=0$; alors nous aurons une courbe tracée sur cette surface. En résumé, l'intégrale générale au sens de LIE sera le système de toute les courbes tracées sur $F=0$, tandis que $F=0$ va jouer ici elle-même le rôle de *solution singulière* (au sens de LIE).

Si maintenant nous appliquons à $F=0$ la transformation de LEGENDRE, nous tombons sur une équation de CLAIRAUT généralisée, déjà rencontrée en exercice,

$$F(p,\ q,\ px+qy-z)=0,$$

dont les propriétés correspondent dualistiquement à celles de (1) : nous avons maintenant une intégrale complète formée de plans, enveloppant une certaine surface, une intégrale générale englobant toutes les développables circonscrites à cette surface, tandis que cette dernière est la solution singulière.

Après avoir considéré les équations aux dérivées partielles qui admettent une intégrale complète formée de points, il est naturel d'envisager celles qui possèdent une intégrale complète formée de lignes. Soit donc une congruence de lignes. Alors, toute surface engendrée par les lignes de la congruence appartient évidemment à l'intégrale générale. Dès lors, nous reconnaissons aisément que l'équation dont il s'agit est une équation linéaire en $p$ et $q$. Ces équations, dont la théorie des champs de vecteurs nous a amenés naturellement à faire l'étude autonome, ne se distinguent au fond par rien d'essentiel des équations les plus générales. Leur propriété distinctive, dans l'ensemble de toutes les équations du premier ordre, peut s'énoncer indifféremment sous l'une des deux formes suivantes :

1° *forme locale : le cône élémentaire est partout réduit à une droite;*

2° *forme intégrale : il existe une intégrale complète formée de lignes.*

Les lignes caractéristiques ne dépendent plus ici que de deux paramètres, au lieu de trois, mais les multiplicités caractéristiques dépendent bien toujours de trois paramètres. Il est intéressant d'approfondir ce point. Écrivons l'équation

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=Pp+Qq-R=0;$$

formons le système caractéristique. On peut l'écrire

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=-\frac{dp}{pP'_x+qQ'_x-R'_x+p(pP'_z+qQ'_z-R'_z)}$$
$$=-\frac{dq}{pP'_y+qQ'_y-R'_y+q(pP'_z+qQ'_z-R'_z)}.$$

Les trois premiers rapports égaux peuvent être envisagés isolément, car P, Q, R ne renferment que $x$, $y$, $z$. Autrement dit, dans le cas où l'équation est

linéaire en $p$ et $q$, on peut définir les lignes caractéristiques indépendamment des développables de même nom. Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait pris $z$ comme paramètre le long d'une de ces lignes. Cherchons à réaliser une bande caractéristique à partir de cette ligne comme support : il nous faut alors considérer les deux relations complémentaires qui définissent $dp$ et $dq$; à la faveur de l'équation donnée, nous pouvons d'ailleurs en considérer une seule. Le problème va donc consister à exprimer $p$ et $q$ en fonction de $z$ (en même temps que $x$, $y$) au moyen des trois équations écrites dans la première ligne et de l'équation $Pp + Qq = R$ elle-même. Attachons-nous au calcul de $p$, et supposons $x$ et $y$ déjà exprimés en fonction de $z$. Alors, l'équation

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pP'_x + qQ'_x - R'_x + p(pP'_z + qQ'_z - R'_z)}{R},$$

dont le second membre est, après élimination de $q$, $x$, $y$, une fonction du second degré de $p$ à coefficients dépendant de $z$, appartient au type de Riccati. Il s'ensuit immédiatement cette propriété :

*Étant données quatre multiplicités caractéristiques ayant pour support une même ligne caractéristique, le rapport anharmonique des quatre plans tangents le long de cette ligne est constant.*

Somme toute, les multiplicités caractéristiques passant par une même courbe caractéristique constituent une famille à un paramètre. Donc, dans l'ensemble, elles dépendent bien, comme dans le cas général, de trois paramètres en tout. La proposition que nous venons d'obtenir pouvait d'ailleurs se prévoir à partir de la théorie des congruences. Soient

$$f(x, y, z) = \alpha, \qquad g(x, y, z) = \beta$$

les équations qui définissent la congruence des lignes caractéristiques. Toute surface intégrale a une équation de la forme

$$\varphi(f, g) = 0.$$

Un plan tangent en un point de la courbe $(\alpha, \beta)$ à l'une de ces surfaces est défini par l'équation

$$\begin{aligned} &\varphi'_f[f'_x(X - x) + f'_y(Y - y) + f'_z(Z - z)] \\ &+ \varphi'_g[g'_x(X - x) + g'_y(Y - y) + g'_z(Z - z)] = 0. \end{aligned}$$

En chaque point de la courbe, les plans tangents aux diverses surfaces intégrales qui la contiennent forment donc un faisceau, le rapport $\varphi'_g : \varphi'_f$ (qui varie d'une surface à l'autre en général) caractérisant complètement le plan tangent. D'ailleurs quand on se déplace le long de la courbe $(\alpha, \beta)$, ce rapport est invariable pour une surface donnée. Prenons maintenant quatre surfaces passant par la courbe $(\alpha, \beta)$, définies par quatre relations $\varphi$ distinctes : il est clair que le rapport anharmonique des quatre plans tangents sera constant et égal à celui des quatre rapports $\varphi'_g : \varphi'_f$ évalués pour les $\alpha$, $\beta$ qui déterminent cette courbe. C'est ce qu'il s'agissait d'établir.

La classe corrélative de la classe constituée par les équations linéaires sera évidemment celle des équations qui se distinguent par l'une des deux propriétés suivantes (indifféremment) :

1° la courbe élémentaire relative à chaque plan est une droite;

2° il existe une intégrale complète formée de surfaces développables.

Ces équations sont encore celles qu'on déduit d'une équation linéaire

$$A(X, Y, Z)P + B(X, Y, Z)Q = C(X, Y, Z)$$

par la transformation de Legendre. Elles peuvent donc s'écrire

$$A(p, q, px + qy - z)x + B(p, q, px + qy - z)y = C(p, q, px + qy - z).$$

Notamment toute équation de la forme

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

où $f$ est un polynome du premier degré en $x$, $y$, $z$ (à coefficients fonctions de $p$ et de $q$) appartient à ce type [1]. Ce genre de considérations prête matière à de fréquents exercices. Nous en donnerons un exemple.

*Trouver les surfaces* S *telles qu'en appelant* P *l'intersection du plan tangent en* M *avec* $Oz$, *et* $\varphi$ *l'angle de ce plan avec le plan* $xOy$, *on ait la relation*

$$\textit{cote de } M - \textit{cote de } P = a \operatorname{tg}^2\varphi,$$

*$a$ désignant une longueur fixe. Montrer qu'il existe une intégrale complète formée de cylindres.*

*Surfaces intégrales dont l'équation peut s'écrire* $z = f(x) + g(y)$ *ou* $z = F(\rho) + G(\omega)$, *en appelant* $\rho$ *et* $\omega$ *les coordonnées polaires d'un point du plan* $xOy$, *relativement au pôle* O *et à l'axe polaire* $Ox$.

*Surfaces développables répondant à la question.*

*Exprimer les coordonnées d'un point d'une surface intégrale, non développable, en fonction des coefficients de pente* $p$, $q$ *du plan tangent.*

(*Rennes, épreuve théorique.*)

La cote de M est égale à $z$, celle de P à $z - px - qy$, d'où

$$\text{cote de } M - \text{cote de } P = px + qy.$$

D'ailleurs, $\varphi$ étant l'angle de la normale avec $Oz$, on a

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1 + p^2 + q^2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}, \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{tg}^2\varphi = p^2 + q^2.$$

Les surfaces cherchées sont donc solutions de l'équation

$$\text{(E)} \qquad px + qy = a(p^2 + q^2).$$

Les multiplicités caractéristiques sont définies par le système différentiel

$$\frac{dx}{x - 2ap} = \frac{dy}{y - 2aq} = \frac{dz}{px + qy - 2a(p^2 + q^2)} = -\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q};$$

---

[1] Car on peut mettre $f$ sous forme d'un polynome du premier degré en $x$, $y$ et $px + qy - z$ à coefficients fonctions de $p$ et de $q$.

on aperçoit immédiatement les trois intégrales premières,

$$\frac{q}{p} = C^{te}, \qquad px - ap^2 = C^{te}, \qquad qy - aq^2 = C^{te}.$$

On en déduit facilement sous forme finie les équations des multiplicités caractéristiques; $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ désignant trois constantes arbitraires, ces équations pourront s'écrire

$$x = au\sin\alpha + \frac{\beta}{u\sin\alpha}, \qquad y = au\cos\alpha - \frac{\beta}{u\cos\alpha}, \qquad z = \frac{a}{2}u^2 + \gamma,$$
$$p = u\sin\alpha, \qquad q = u\cos\alpha.$$

Les équations de la première ligne, où $u$ est un paramètre variable, représentent le complexe des *courbes* caractéristiques; ce sont des cubiques gauches.

Les équations de la seconde ligne montrent que sur toutes les multiplicités caractéristiques correspondant à une même valeur de $\alpha$, le plan tangent reste constamment parallèle à la droite de cosinus directeurs ($\cos\alpha$, $-\sin\alpha$, 0). Les surfaces intégrales engendrées par ces caractéristiques seront donc des cylindres ayant leurs génératrices parallèles au plan des $xy$. Pour les obtenir, observons que des équations

$$px + qy = a(p^2 + q^2), \qquad p = u\sin\alpha, \qquad q = u\cos\alpha,$$

on tire

$$x\sin\alpha + y\cos\alpha = au;$$

l'équation

$$dz - pdx - qdy = 0$$

s'écrit alors

$$dz - u(\sin\alpha\, dx + \cos\alpha\, dy) = dz - au\,du = 0,$$

d'où

$$z - \frac{(x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2}{2a} = \gamma.$$

On a ainsi une intégrale complète formée de cylindres.

Pour intégrer l'équation (E), on aurait pu aussi, remarquant que cette équation est d'un type connu (n° 269, II), poser

$$px - ap^2 = \beta, \qquad qy - aq^2 = -\beta;$$

on aurait alors obtenu une intégrale complète

$$z = f(x) + g(y),$$

formée de surfaces de translation (n° 217).

Enfin, en passant aux coordonnées cylindriques, on met l'équation (E) sous la forme

$$\rho\frac{\partial z}{\partial \rho} = a\left[\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2\right];$$

c'est encore une équation du même type, et par suite il existe une intégrale complète de la forme

$$z = F(\rho) + G(\omega);$$

on verra sans peine que ces surfaces sont des hélicoïdes d'axe $Oz$.

Pour résoudre rapidement les deux dernières questions, remarquons que l'équation (E) se ramène, par la transformation de Legendre, à l'équation linéaire

$$(E_1) \qquad PX + QY = a(X^2 + Y^2).$$

Aux surfaces développables intégrales de l'équation (E) correspondent des courbes,

intégrales de l'équation $(E_1)$ au sens de Lie, c'est-à-dire les courbes caractéristiques, dont les équations en termes finis s'écrivent

$$\frac{X}{Y} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad Z - \frac{a}{2}(X^2 + Y^2) + \gamma = 0,$$

$\alpha$ et $\gamma$ désignant deux constantes arbitraires. Chacune de ces courbes sert de support ponctuel à une multiplicité intégrale : posons

$$(1) \qquad X = u \sin\alpha, \qquad Y = u\cos\alpha, \qquad Z = \frac{a}{2}u^2 - \gamma;$$

les coefficients P et Q devront satisfaire à l'équation unique

$$dZ - P dX - Q dY = 0 \qquad \text{ou} \qquad au - P\sin\alpha - Q\cos\alpha = 0;$$

on pourra donc poser, en désignant par $v$ un nouveau paramètre,

$$(2) \qquad P = au\sin\alpha + \frac{v}{u\sin\alpha}, \qquad Q = au\cos\alpha - \frac{v}{u\cos\alpha},$$

et les équations (1) et (2) définissent les multiplicités intégrales de $(E_1)$ ayant pour supports ponctuels des courbes. En leur appliquant la transformation de Legendre,

$$x = P, \qquad y = Q, \qquad z = PX + QY - Z, \qquad p = X, \qquad q = Y,$$

on aura donc les surfaces développables intégrales de (E); on a ainsi

$$x = au\sin\alpha + \frac{v}{u\sin\alpha}, \qquad y = au\cos\alpha - \frac{v}{u\cos\alpha}, \qquad z = \frac{a}{2}u^2 + \gamma,$$

d'où

$$z = \frac{(x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2}{2a} + \gamma.$$

On retrouve les cylindres précédemment obtenus. En dehors de cette famille de cylindres, l'équation (E) n'admet donc pas d'intégrale qui soit une surface développable.

Les *surfaces* intégrales de l'équation $(E_1)$ sont définies par l'équation

$$Z = \frac{a}{2}(X^2 + Y^2) + f\left(\frac{X}{Y}\right);$$

les multiplicités intégrales correspondantes sont donc représentées par des équations de la forme

$$X = u, \quad Y = v, \quad Z = \frac{a}{2}(u^2 + v^2) + f\left(\frac{u}{v}\right), \quad P = au + \frac{1}{v}f'\left(\frac{u}{v}\right), \quad Q = av - \frac{u}{v^2}f'\left(\frac{u}{v}\right);$$

si on leur applique la transformation de Legendre, on obtiendra les multiplicités intégrales de l'équation (E) ayant pour supports ponctuels des surfaces non développables; on a ainsi

$$x = au + \frac{1}{v}f'\left(\frac{u}{v}\right), \qquad y = av - \frac{u}{v^2}f'\left(\frac{u}{v}\right), \qquad z = \frac{a}{2}(u^2 + v^2) + f\left(\frac{u}{v}\right),$$
$$p = u, \qquad q = v.$$

En remplaçant $u$ et $v$ par $p$ et $q$ dans les équations de la première ligne, on a les formules demandées.

**273. Théories dualistiques en relations avec la théorie actuelle.** — Nous avons insisté sur le caractère dualistique de la théorie des

équations aux dérivées parallèles du premier ordre. Il est donc naturel d'examiner les rapports qui existent entre cette théorie et quelques autres de la géométrie infinitésimale, possédant aussi le caractère dualistique.

Nous pensons ici d'une part à *la théorie des systèmes conjugués et des lignes asymptotiques*, d'autre part à *la théorie des complexes de droites.*

Lorsqu'on définit sur une surface deux familles de courbes formant un réseau conjugué, un rôle essentiel est dévolu aux éléments de contact et aux multiplicités qu'ils engendrent le long des courbes du réseau.

Sur chaque élément de contact de la surface se croisent deux de ces multiplicités, telles que la tangente à la courbe de l'une soit la génératrice de la développable de l'autre. Cette propriété est invariante projectivement et dualistiquement. De même, dans la théorie des asymptotiques, qui est un cas limite de la précédente (celui où les deux directions conjuguées se confondent), il y a intérêt à considérer les éléments de contact qui décrivent des multiplicités asymptotiques. Une multiplicité asymptotique peut d'ailleurs se définir indépendamment de telle ou telle surface qui la contient : on l'obtient en associant à chaque point d'une courbe le plan osculateur correspondant.

Pareillement, la théorie des systèmes de droites, développée au point de vue des relations de contact, est essentiellement projective et dualistique : en effet l'homographie et la dualité font correspondre à une droite une autre droite et conservent les relations de contact.

**274.** Après ces généralités, abordons quelques applications concrètes qui nous révéleront mieux les liens entre ces divers ordres d'idées.

Soit $(M, \mathfrak{T})$ un élément de contact d'une surface intégrale de l'équation

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0;$$

la tangente en M à la courbe caractéristique et la génératrice de contact du plan $\mathfrak{T}$ et de la développable caractéristique ont des directions conjuguées sur la surface. On demande fréquemment, après avoir obtenu les surfaces intégrales, de déterminer sur chacune d'elles les conjuguées des courbes caractéristiques. Cela revient donc à chercher les lignes qui se dirigent en chaque point suivant la génératrice de contact du plan tangent en ce point avec la développable caractéristique, droite qui coïncide avec la tangente à la courbe élémentaire de ce plan.

Voici un cas où le théorème de Koenigs (n° 218) fournit ces lignes sans intégration. Supposons que l'équation (1) soit de la forme

$$(2) \qquad \psi(px + qy, z, p, q) = 0.$$

Alors dans ce cas (et dans ce cas seulement) le système des caractéristiques admet l'intégrale première $q = mp$. On en conclut que les développables caractéristiques sont des cylindres ayant leurs génératrices parallèles au plan $xOy$, ou, projectivement parlant, des cônes ayant leurs sommets sur la droite

de l'infini du plan $xOy$; les courbes caractéristiques d'une surface intégrale donnée sont donc les lignes de contact des cônes circonscrits à la surface ayant leurs sommets sur cette droite. Donc, d'après le théorème de KOENIGS, les courbes conjuguées sont les sections planes des surfaces intégrales menées par cette droite, c'est-à-dire ici les courbes de niveau $z=h$. Il est clair que cette remarque s'étend (*mutatis mutandis*) aux équations qui se déduisent de (1) par une transformation homographique ou dualistique.

Nous indiquerons plus loin à quelle condition les bandes caractéristiques sont, sur toute surface intégrale, des multiplicités asymptotiques. Mais, pour y parvenir commodément, nous aurons recours à la théorie des complexes de droites.

Soit donné un complexe de droites par une équation homogène

$$H(a, b, c; l, m, n)=0$$

entre les six coordonnées de PLÜCKER de cette droite (nº 245). Nous avons donc une famille de droites (ou *génératrices*) dépendant de trois paramètres; toutes celles qui passent par un point $(x_0, y_0, z_0)$ engendrent un cône, appelé *cône du complexe*. Il a pour équation

$$H(x-x_0, y-y_0, z-z_0, yz_0-zy_0, zx_0-xz_0, xy_0-yx_0)=0.$$

De même, toutes les droites du complexe situées dans un plan enveloppent *la courbe du complexe* relative à ce plan. Ceci suggère un rapprochement avec les équations du premier ordre, où nous avons rencontré le cône élémentaire et la courbe élémentaire. Nous allons approfondir ce point, en montrant qu'à chaque complexe de droites est attachée une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Seulement cette équation est particularisée, de sorte que la réciproque n'est pas vraie.

Il faut montrer qu'un complexe détermine une équation du premier ordre; pour cela, il suffit d'apprendre à distinguer les éléments de contact intégraux. Nous aurons recours au théorème suivant :

*Soit* $G_0$ *une génératrice fixe du complexe, appartenant à une famille* $G^\lambda$ *qui dépend de l'unique paramètre* $\lambda$; *parmi toutes ces familles, considérons celles qui sont formées par des droites* $G_\lambda$ *admettant une enveloppe; suivant le choix opéré parmi ces dernières, nous aurons tel ou tel point de contact* M *sur* $G_0$; *si l'on fixe le point* M, *le plan osculateur en ce point* (c'est-à-dire le plan tangent à la développable tout le long de $G_0$) *est bien déterminé, et sa loi de dépendance vis-à-vis du point* M *sur* $G_0$ *est homographique.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du nº 247; il suffit de remarquer que l'arête de rebroussement de la développable considérée est une courbe du complexe.

En résumé, à chaque génératrice d'un complexe de droites (sauf peut-être pour des génératrices formant au plus une congruence exceptionnelle) il y a lieu d'attacher une homographie entre un point décrivant cette génératrice et

un plan tournant autour d'elle, homographie à laquelle un rôle essentiel est dévolu dans tous les problèmes de relations de contact engageant le complexe. Mais alors nous associons ainsi à chaque génératrice une famille à un paramètre d'éléments de contact, et comme les génératrices dépendent de trois paramètres, nous aurons bien finalement construit, par la considération du complexe, suivant un mode permanent, une famille d'éléments de contact à quatre paramètres, c'est-à-dire dont les cinq coordonnées sont liées par une relation

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{1}$$

Revenons sur l'homographie précédente; elle régira notamment :

1° la correspondance entre un point M arbitrairement choisi sur $G_0$ comme sommet d'un cône du complexe et la direction du plan tangent le long de $G_0$ à ce cône;

2° la correspondance entre un plan $\mathfrak{P}$ arbitrairement mené par $G_0$, et le point de contact de $G_0$ avec la courbe du complexe relative à ce plan.

De là on déduit immédiatement les résultats suivants :

1° *Le cône élémentaire relatif à l'équation* (1) *et ayant pour sommet un point* M *quelconque est le cône du complexe en* M.

2° *La courbe élémentaire relative à l'équation* (1) *et située dans un plan* $\mathfrak{P}$ *quelconque est la courbe du complexe pour ce plan.*

**275.** Nous allons maintenant montrer en quoi se particularisent les équations déduites, telles que (1), de la considération d'un complexe de droites. Soit une multiplicité caractéristique : la courbe de cette multiplicité a pour tangentes une famille à un paramètre $\lambda$ de génératrices $G_\lambda$. En un point M de cette courbe, le plan $\mathfrak{P}$ qui s'associe à M pour donner un élément de contact est le plan osculateur à notre courbe. Il s'ensuit que la multiplicité caractéristique considérée est une multiplicité asymptotique. En résumé :

*Toute équation du premier ordre attachée à un complexe de droites possède cette particularité : sur chaque élément de contact intégral* (M, $\mathfrak{P}$), *la génératrice du cône élémentaire de sommet* M *tangent à cet élément, et la tangente en* M *à la courbe élémentaire relative à* $\mathfrak{P}$, *se confondent suivant une génératrice du complexe; il s'ensuit que les multiplicités caractéristiques sont en même temps asymptotiques.*

La réciproque de cette proposition est vraie; pour l'établir, observons d'abord que si l'équation aux dérivées partielles considérée appartient au type le plus général, il n'y a aucune relation entre les quatre paramètres qui déterminent une génératrice rectiligne d'un cône élémentaire. On n'a pas toujours pour autant le droit d'en conclure que toute droite de l'espace est génératrice d'un cône élémentaire, car l'équation $F = 0$ peut soumettre ces génératrices à des conditions d'inégalité [1]; mais du moins peut-on dire ceci : prenons un

[1] Pour avoir un exemple d'une telle condition d'inégalité, il suffit d'imaginer une équation aux dérivées partielles admettant pour intégrale complète une famille à deux paramètres formée de sphères de rayon constant R, à chacune desquelles une sphère fixe

point M, une génératrice particulière G du cône $\Gamma_M$, enfin une droite G′ suffisamment voisine de G. On pourra toujours trouver sur G′ un point M′ tel que le cône $\Gamma_{M'}$ admette G′ pour génératrice.

Dans le cas spécial auquel se rapporte le théorème précédent, les génératrices des cônes élémentaires ne dépendent plus que de trois paramètres. Si nous résolvons l'équation (1) par rapport à $z$, de manière à lui donner la forme

$$z = \varphi(x, y, p, q), \tag{2}$$

l'ensemble des génératrices des cônes $\Gamma_M$, c'est-à-dire le système des droites

$$\frac{X - x}{\varphi'_p} = \frac{Y - y}{\varphi'_q} = \frac{Z - \varphi(x, y, p, q)}{p\varphi'_p + q\varphi'_q},$$

doit donc former un complexe. Autrement dit, le jacobien des quatre fonctions

$$x - \frac{\varphi\varphi'_p}{p\varphi'_p + q\varphi'_q}, \quad y - \frac{\varphi\varphi'_q}{p\varphi'_p + q\varphi'_q}, \quad \frac{\varphi'_p}{p\varphi'_p + q\varphi'_q}, \quad \frac{\varphi'_q}{p\varphi'_p + q\varphi'_q},$$

(lesquelles dépendent des quatre variables $x$, $y$, $p$, $q$) est nul. Par suite, le théorème direct exprime que, si ce jacobien est nul, on peut déduire du système caractéristique [1] de (2) l'équation

$$dxdp + dydq = 0,$$

c'est-à-dire que $\varphi$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\varphi'_p(\varphi'_x - p) + \varphi'_q(\varphi'_y - q) = 0. \tag{3}$$

Le lecteur pourra calculer, à titre d'exercice, ce jacobien et montrer qu'il contient en facteur le premier membre de (3). De sorte que, *réciproquement*, si les caractéristiques sont asymptotiques [propriété qui implique la relation (3)], le jacobien précédent est nul et l'équation proposée provient bien d'un complexe de droites, comme nous voulions l'établir.

**276.** Remarque. — Au moyen des deux propriétés fondamentales :

*a*) coïncidence de la tangente à la courbe caractéristique avec la génératrice de contact du cône $\Gamma_M$ et du plan $\mathfrak{L}$,

*b*) coïncidence de la génératrice de contact de la développable caractéristique avec la tangente en M à la courbe élémentaire $C_{\mathfrak{L}}$,

on peut retrouver d'une manière autonome [2] les équations différentielles des bandes caractéristiques, *sous réserve d'examiner séparément le cas, étudié à l'instant, où les deux directions conjuguées précédentes se confondent.*

---

de rayon $r < R$ soit tangente intérieurement. Il est clair, dans ces conditions, que toutes les droites de l'espace ne sont pas génératrices de cônes élémentaires : les sécantes à la sphère fixe sont notamment exclues.

(1) Ce système est ici

$$\frac{dx}{\varphi'_p} = \frac{dy}{\varphi'_q} = \frac{-dp}{\varphi'_x - p} = \frac{-dq}{\varphi'_y - q}.$$

(2) C'est-à-dire sans partir des surfaces intégrales.

Soit en effet l'équation de type général

(1) $$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Le cône élémentaire de sommet $M(x, y, z)$ est l'enveloppe des plans

$$Z - z = P(X - x) + Q(Y - y),$$

avec $$F(x, y, z, P, Q) = 0.$$

Il est donc le lieu des droites

(2) $$\frac{X - x}{F'_P} = \frac{Y - y}{F'_Q} = \frac{Z - z}{pF'_P + qF'_Q},$$

avec

(3) $$F(x, y, z, P, Q) = 0.$$

D'autre part, la courbe élémentaire du plan $(\mathfrak{L})$ est déterminée par les deux équations

($\mathfrak{L}$) $$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$
$$F(X, Y, Z, p, q) = 0.$$

Cela posé, considérons l'élément de contact $(M, \mathfrak{L})$. Les paramètres directeurs de la tangente à la courbe de la multiplicité caractéristique issue de cet élément seront

$$F'_p(x, y, z, p, q), \qquad F'_q(x, y, z, p, q) \qquad \text{et} \qquad pF'_p + qF'_q,$$

car, au lieu de prendre un plan quelconque $(P, Q)$ tangent au cône $\Gamma_M$, nous prenons le plan $\mathfrak{L}(p, q)$.

D'autre part, la génératrice de contact de $\mathfrak{L}$ avec la développable caractéristique est définie par l'équation $(\mathfrak{L})$ et par

($\mathfrak{L}'$) $$dp(X - x) + dq(Y - y) = 0 \qquad \text{(projection sur } xOy)$$

(après suppression de $dz - pdx - qdy$, qui s'annule le long de la bande). Or la tangente en M à la courbe élémentaire du plan $(\mathfrak{L})$ est définie par les équations

$$\begin{cases} F'_x(X - x) + F'_y(Y - y) + F'_z(Z - z) = 0, \\ Z - z = p(X - x) + q(Y - y); \end{cases}$$

en projection sur le plan $xOy$, cette droite aura donc pour équation

$$(F'_x + pF'_z)(X - x) + (F'_y + qF'_z)(Y - y) = 0.$$

Écrivons que cette droite projetée coïncide avec celle qui est définie par l'équation $(\mathfrak{L}')$. Nous obtenons

(4) $$\frac{dp}{F'_x + pF'_z} = \frac{dq}{F'_y + qF'_z}, \qquad (\text{posons} = dv).$$

Finalement, nous obtenons donc quatre équations, à savoir :

1° l'équation (1) commune à tous les éléments de contact intégraux;

2° les équations

(5) $$\frac{dx}{F'_p} = \frac{dy}{F'_q} = \frac{dz}{pF'_p + qF'_q} \qquad (\text{posons} = du),$$

qui traduisent la condition $a$);

3° l'équation (4) qui traduit la condition $b$).

Ces équations définissent d'une manière tout à fait générale les bandes caractéristiques, dont l'ensemble dépend de trois paramètres.

La restriction que nous avons indiquée intervient lorsqu'on veut mettre ce système

sous la forme classique. Pour cela, il faut différentier l'équation $F=0$, et remplacer dans $dF$, les trois quantités $dx$, $dy$, $dz$ par leurs expressions en fonction de la valeur commune $du$ des rapports (5), les deux quantités $dp$ et $dq$ par leurs expressions en fonction de la valeur commune $dv$ des rapports (4). Il vient alors

$$[F'_x F'_p + F'_y F'_q + F'_z(pF'_p + qF'_q)](du + dv) = 0;$$

on a donc $dv = -du$, pourvu que l'on ait

$$(F'_x + pF'_z)F'_p + (F'_y + qF'_z)F'_q \neq 0,$$

ou

$$dpdx + dqdy \neq 0,$$

c'est-à-dire pourvu que les caractéristiques ne soient pas en même temps asymptotiques. La même relation $du + dv = 0$ reste valable encore dans ce cas, mais on ne peut plus l'établir de cette façon.

**277. Éléments d'une théorie déductive des équations du premier ordre.** — Le lecteur voit clairement comment nous avons procédé : nous avons demandé à l'intuition de nous révéler un certain nombre de résultats fondamentaux de la théorie que nous étudions. Ces résultats ont donc été admis, mais non démontrés rigoureusement. Toutefois nous avons déjà appris à les assembler, à les appliquer à des questions concrètes, et à en distinguer les caractères saillants. Après cette étude préliminaire, nous sommes maintenant mieux armés pour la recherche d'une théorie rigoureuse. Il eût été vain et fastidieux de vouloir donner dès le début un exposé satisfaisant. Au contraire, il est maintenant intéressant de justifier les points qui, *a posteriori*, nous apparaissent comme les plus essentiels.

Dans ce qui précède, nous avons utilisé surtout la notion d'intégrale complète. Il y a donc lieu de reprendre d'abord, avec LAGRANGE, l'étude des équations dont on connaît une intégrale complète.

**Équations obtenues par élimination.** — Nous allons faire connaître le raisonnement par lequel LAGRANGE a justifié la loi d'obtention des intégrales, telle que nous l'avons énoncée tout au début. Nous donnerons ensuite des indications sur les compléments qu'il nécessite, lorsqu'on veut développer une théorie rigoureuse.

Soit la famille de surfaces à deux paramètres

(1) $$V(x, y, z, a, b) = 0.$$

Si nous *éliminons* $a$ et $b$ entre l'équation (1) et les deux suivantes

(2) $$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$ (3) $$\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

nous obtenons une équation aux dérivées partielles du premier ordre

(4) $$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

LAGRANGE remarque l'équivalence des deux problèmes suivants :

(P) Trouver une fonction $z(x, y)$ solution de l'équation (4);

(P′) Trouver trois fonctions $z(x, y)$, $a(x, y)$, $b(x, y)$ vérifiant le système des équations (1), (2), (3).

En effet, soit $z(x, y)$ une solution de (4); en portant dans F sa valeur et celles de ses dérivées, nous obtenons une fonction composée de $x$ et $y$ qui est identiquement nulle. Donc, pour chaque système de valeurs $x$, $y$ les équations (1), (2), (3), où l'on a également porté les valeurs de $z$, $p$, $q$, admettent au moins une solution $a$, $b$ commune (d'après la définition même de l'élimination).

Inversement, si $z$, $a$, $b$ sont trois fonctions de $x$, $y$ fournissant une solution du problème (P′), pour chaque système de valeurs $x$, $y$, les équations (1), (2), (3) admettent une solution $a$, $b$ commune. Donc entre $z$ et ses dérivées $p$ et $q$, on a bien la relation (4) : par suite $z(x, y)$ est bien une solution du problème (P).

L'équivalence des problèmes (P) et (P′) étant ainsi établie (au moins est-elle légitime lorsque V est algébrique en $a$ et $b$), nous pouvons substituer le problème (P′) au problème (P). Or le problème (P′) équivaut à son tour à la recherche de trois fonctions $z$, $a$, $b$ de $x$, $y$, vérifiant le nouveau système

$$\text{(1)} \qquad V(x, y, z, a, b) = 0,$$

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} = 0,$$

$$\text{(6)} \qquad \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} = 0,$$

dont on obtient les deux dernières équations en écrivant que les dérivées partielles premières de la fonction composée

$$V[x, y, z(x, y), a(x, y), b(x, y)],$$

sont identiquement nulles, et en tenant compte de (2) et (3). Or, pour satisfaire aux équations (5) et (6), homogènes et linéaires en $\frac{\partial V}{\partial a}$ et $\frac{\partial V}{\partial b}$, nous n'avons que les alternatives suivantes :

1° Prendre $\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{\partial V}{\partial b} = 0$. Ces équations, jointes à $V = 0$, déterminent, *si elle existe*, l'enveloppe des surfaces $V(x, y, z, a, b) = 0$, lorsque les deux paramètres $a$ et $b$ sont indépendants. Alors cette enveloppe est une surface intégrale de l'équation : c'est justement l'*intégrale singulière*. S'il n'y a pas d'enveloppe, le système $V = 0$, $\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{\partial V}{\partial b} = 0$ définit un lieu de points singuliers des surfaces $V = 0$, lequel n'est pas en général une solution de l'équation aux dérivées partielles formée par élimination et simplifiée par suppression des facteurs indépendants de $p$ et $q$ qui pourraient y figurer [1].

---

[1] Il importe de faire cette restriction pour éviter d'être en contradiction avec l'équivalence des problèmes (P) et (P′) (ou (P′) transformé). En réalité, s'il y a une surface

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

lieu de points singuliers des surfaces $V = 0$, on vérifie très aisément sur des exemples qu'en

2° Prendre $\frac{\partial V}{\partial a} \neq 0$ et $\frac{\partial V}{\partial b} \neq 0$. Il est alors nécessaire que le déterminant du système (5), (6) par rapport à ces deux inconnues soit nul, c'est-à-dire que

$$\frac{D(a, b)}{D(x, y)} = 0.$$

Si les mineurs de ce déterminant sont nuls eux-mêmes, nous obtenons $a = \text{const.}$, $b = \text{const.}$ : c'est l'intégrale complète d'où nous étions partis. Sinon, nous devrons avoir

$$b = \varphi(a),$$

ce qui nous conduit aux solutions

$$V[x, y, z, a, \varphi(a)] = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\varphi'(a) = 0.$$

Ce raisonnement justifie donc bien les résultats que nous avons annoncés au début de cette étude.

Examinons maintenant sa portée véritable. Le mot *élimination* est réservé d'ordinaire au domaine des relations algébriques, le seul où il ait un sens bien précis. Mais alors, si nous astreignons V à être algébrique en $a$, $b$, nous délimitons artificiellement la théorie, au profit exclusif des équations possédant une famille d'intégrales dont l'équation est une fonction algébrique de ces deux paramètres. Pour généraliser conformément au point de vue des fonctions de variables réelles, nous devrons substituer aux précédents d'autres raisonnements basés sur des hypothèses locales (continuité et non-annulation de certaines dérivées), apparentés à ceux qu'on rencontre à propos des fonctions implicites et des enveloppes [1]. Moyennant quoi, nous pourrons encore établir l'équivalence des problèmes (P) et (P'), en nous restreignant à un champ de variation de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, $a$, $b$ suffisamment petit autour des valeurs $x_0$, $y_0$, $z_0$, $p_0$, $q_0$, $a_0$, $b_0$, pour lesquelles nous avons supposé que certaines dérivées ne s'annulent pas. Ces indications, que nous ne pouvons développer ici davantage, suffisent à faire comprendre que la théorie de Lagrange possède réellement un caractère de grande généralité.

Voici un exemple qui met bien son utilité en évidence. Considérons deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ qui admettent par rapport à $x$ et à $y$ respectivement des dérivées $\varphi'(x)$ et $\psi'(y)$ continues. Alors l'équation aux dérivées partielles

$$z\varphi'(x)\psi'(y) = pq$$

admet l'intégrale complète évidente

$$z = [\varphi(x) + a][\psi(y) + b].$$

éliminant $a$, $b$ entre (1), (2), (3), le résultat obtenu contient en facteur la fonction $\varphi(x, y, z)$. La présence de ce facteur sauvegarde l'équivalence annoncée. Mais, quand on parle de l'équation aux dérivées partielles, on a d'ordinaire en vue ce qui reste du résultat après qu'on a supprimé les facteurs ne contenant pas $p$, $q$.

(1) Voir sur ce point notre *Cours de Géométrie Analytique*, p. 241 et notre article des *Nouvelles Annales*, 5e série, tome I, p. 8 et suivantes.

Envisageons le cas où les fonctions $\varphi'(x)$ et $\psi'(y)$ ne seraient pas dérivables : il devient alors impossible de définir les multiplicités caractéristiques de l'équation proposée au moyen d'un système différentiel. Cependant, la théorie de LAGRANGE s'applique (reprendre l'exposé complet sur cet exemple, comme exercice) et montre bien qu'en dehors de l'intégrale singulière $z=0$, et des surfaces précédentes, il n'y a pas d'autres surfaces intégrales que celles qui composent l'intégrale générale. En même temps, elle prouve aussi qu'il existe encore des bandes caractéristiques, bien que celles-ci ne puissent plus être obtenues comme intégrales d'un système différentiel.

Notons encore que la méthode de LAGRANGE fournirait, dans cet ordre d'idées, des résultats relatifs aux équations différentielles ordinaires. Soient $x_0$, $y_0$, $a_0$ trois nombres satisfaisant à l'équation

$$(e) \qquad f(x, y, a)=0$$

et tels que l'on ait

$$(h_1) \qquad f'_a(x_0, y_0, a_0)\neq 0, \qquad (h_2) \qquad f'_y(x_0, y_0, a_0)\neq 0.$$

Alors on peut, en se plaçant au point de vue local, éliminer $a$ entre l'équation $(e)$ et la suivante

$$(e') \qquad f'_x + y' f'_y = 0.$$

Cela signifie qu'on considérera la fonction $a(x, y)$ définie au voisinage du système de valeurs $x_0$, $y_0$ par l'équation $(e)$ et se réduisant à $a_0$ pour ces valeurs, et qu'on portera cette fonction dans $(e')$ de manière à obtenir finalement une équation différentielle

$$y' = -\frac{f'_x[x, y, a(x, y)]}{f'_y[x, y, a(x, y)]}.$$

Le principe du raisonnement de LAGRANGE, appliqué ici, prouve alors qu'il existe *une intégrale et une seule* de l'équation différentielle se réduisant à $y_0$ pour $x=x_0$, même dans les cas où la fonction écrite au second membre échappe aux conditions classiquement invoquées pour assurer dans le champ réel l'exactitude du théorème de CAUCHY. Ainsi, sous réserve que les hypothèses $(h_1)$ et $(h_2)$ soient satisfaites, les singularités signalées par M. PEANO [1] ne se produisent pas pour les équations différentielles formées par élimination.

Ces remarques, outre leur intérêt propre, font mieux comprendre l'importance des renseignements qu'on peut attendre des idées de LAGRANGE dans le domaine des équations aux dérivées partielles, lorsqu'on se préoccupe de faire le moins possible d'hypothèses sur l'existence de dérivées des solutions. Toutefois, au point de vue pratique, le cas le plus intéressant est celui où partant d'une équation donnée *a priori*, on peut définir les bandes caractéristiques par le système différentiel que nous avons appris à former, et où ce système remplit toutes conditions permettant de justifier le théorème de CAUCHY (par exemple au moyen des approximations successives de M. PICARD).

---

(1) Voir p. 221, note 1.

On peut alors se demander si toute surface intégrale non singulière se laisse engendrer à l'aide de multiplicités caractéristiques. C'est cette question que nous allons résoudre affirmativement.

**278. Le problème de Cauchy.** — Soit une courbe C, douée en chaque point d'une tangente variant continûment le long de cette courbe. Supposons que C ne soit pas caractéristique. Le problème de CAUCHY consiste à trouver une surface intégrale passant par la courbe C:

L'existence de solutions est une conséquence du théorème suivant :

*Toute famille* continue *à un paramètre de bandes caractéristiques telle que chacune de ces bandes ait un élément de contact commun avec* C *engendre une surface intégrale passant par* C.

Supposons que les coordonnées d'un point courant M de C soient définies en fonction d'un paramètre $t$. Appelons comme précédemment $u$ le paramètre spécifiant un élément de contact le long d'une multiplicité caractéristique. Alors, par hypothèse, nous aurons une famille à un paramètre de bandes caractéristiques, définie analytiquement par cinq relations

$$(1) \quad x=x(t, u), \quad y=y(t, u), \quad z=z(t, u), \quad p=p(t, u), \quad q=q(t, u),$$

dont les seconds membres satisfont aux relations

$$(2) \qquad \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{F'_p}=\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{F'_q}=\frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{pF'_p+qF'_q}=-\frac{\frac{\partial p}{\partial u}}{F'_x+pF'_z}=-\frac{\frac{\partial q}{\partial u}}{F'_y+qF'_z}.$$

Nous avons bien une famille à deux paramètres d'éléments de contact liés par la relation identique en $t$ et $u$

$$(3) \qquad \frac{\partial z}{\partial u}=p\frac{\partial x}{\partial u}+q\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Cette famille d'éléments de contact nous donnera donc une surface (laquelle sera dès lors solution, puisque formée d'éléments intégraux) si nous avons en outre

$$\frac{\partial z}{\partial t}=p\frac{\partial x}{\partial t}+q\frac{\partial y}{\partial t};$$

nous allons prouver qu'il en est ainsi. Convenons que, sur chaque caractéristique, $u$ s'annule pour l'élément situé sur la courbe C. Pour $u=0$, il y aura bien identiquement annulation de la fonction

$$\varphi(t, u)=\frac{\partial z}{\partial t}(t, u)-p\frac{\partial x}{\partial t}(t, u)-q\frac{\partial y}{\partial t}(t, u).$$

Il s'agit de montrer qu'il en est encore ainsi quel que soit $u$. En effet, nous avons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}=\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial u}-p\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial u}-q\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial u}-\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t},$$

et d'ailleurs, en dérivant l'identité (3) par rapport à $t$, nous avons aussi

$$0=\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u}-p\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial u}-q\frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial u}-\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u};$$

en retranchant membre à membre, il vient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}=\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u}-\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t},$$

ou, en tenant compte des relations (2),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}=\frac{\partial p}{\partial t}F'_p+\frac{\partial q}{\partial t}F'_q+\frac{\partial x}{\partial t}(F'_x+pF'_z)+\frac{\partial y}{\partial t}(F'_y+qF'_z)$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}[F(x, y, z, p, q)]-\varphi F'_z;$$

dans cette dernière expression, le premier terme est nul, et il reste seulement

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}=-\varphi F'_z;$$

le long de chaque caractéristique $F'_z$ est une fonction composée bien déterminée de $u$ : on a donc, en intégrant,

$$\varphi(t, u)=\varphi(0, u)e^{-\int_0^u F'_z du};$$

il s'ensuit bien que $\varphi(t, u)$ est identiquement nul.

Pratiquement, on dirige le calcul de la façon suivante; soient

$$x=\xi(t), \qquad y=\eta(t), \qquad z=\zeta(t)$$

les équations paramétriques de la courbe C pour laquelle on demande de résoudre le problème de Cauchy. On cherche d'abord la bande caractéristique déterminée par un élément initial donné, correspondant à la valeur $u_0$ du paramètre $u$; soient

$$x=x(u; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \quad y=y(u; x_0, \dots q_0), \quad z=z(u; x_0, \dots q_0),$$
$$p=p(u; x_0, \dots q_0), \qquad q=q(u; x_0, \dots q_0)$$

les équations de cette bande. On fait alors décrire au point $(x_0, y_0, z_0)$ la courbe C, c'est-à-dire que l'on pose

$$x_0=\xi(t), \qquad y_0=\eta(t), \qquad z_0=\zeta(t),$$

et l'on a pour déterminer $p_0$ et $q_0$ les deux équations

$$F(\xi, \eta, \zeta, p_0, q_0)=0, \qquad \zeta'(t)-p_0\xi'(t)-q_0\eta'(t)=0.$$

Ces équations font connaître $p_0$ et $q_0$; en portant les valeurs de $x_0$, $y_0$, $z_0$, $p_0$ et $q_0$ dans les équations de la bande, on obtient bien la surface intégrale lieu des caractéristiques issues des divers points de C.

Reprenons par exemple l'équation

$$px+qy=a(p^2+q^2),$$

étudiée au n° 270, et cherchons la surface intégrale qui passe par la circonférence

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 = R^2.$$

Le système différentiel des caractéristiques peut s'écrire

$$\frac{dx}{x - 2ap} = \frac{dy}{y - 2aq} = -\frac{dz}{a(p^2 + q^2)} = -\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q} = -\frac{du}{u};$$

cherchons la bande caractéristique passant par l'élément $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ pour $u = 1$; on trouve

$$x = ap_0u + \frac{x_0 - ap_0}{u}, \quad y = aq_0u + \frac{y_0 - aq_0}{u}, \quad z = z_0 + \frac{a}{2}(p_0^2 + q_0^2)(u^2 - 1),$$
$$p = p_0u, \qquad q = q_0u.$$

On aura alors

$$x_0 = R\cos t, \qquad y_0 = R\sin t, \qquad z_0 = 0,$$
$$R(p_0\cos t + q_0\sin t) = a(p_0^2 + q_0^2), \qquad p_0\sin t - q_0\cos t = 0;$$

on en déduit

$$p_0 = 0, \qquad q_0 = 0, \qquad \text{d'où la solution banale} \qquad z = 0,$$

ou bien
$$p_0 = \frac{R}{a}\cos t, \qquad q_0 = \frac{R}{a}\sin t,$$

d'où la solution

$$x = Ru\cos t, \qquad y = Ru\sin t, \qquad z = \frac{R^2}{2a}(u^2 - 1),$$

c'est-à-dire
$$2az = x^2 + y^2 - R^2,$$

équation d'un paraboloïde de révolution autour de $Oz$.

REMARQUE. — Du raisonnement précédent découle la conséquence suivante : *le système de toutes les caractéristiques issues d'un point constitue une surface intégrale.* Nous avions déjà obtenu ce résultat par la considération des intégrales complètes. Ici, on le démontre en remarquant qu'on a encore $\varphi(t, 0) = 0$ par le fait des trois relations suivantes :

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, 0) = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(t, 0) = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial t}(t, 0) = 0.$$

A chaque point M de C se trouve ainsi attachée une surface intégrale $\Sigma_M$ admettant en M, pour cône des tangentes, le cône élémentaire. Cela posé, il nous est facile de construire une intégrale complète de notre équation aux dérivées partielles : en effet, nous possédons même maintenant un système de surfaces intégrales, à savoir le système des surfaces $\Sigma_M$, qui dépend de trois paramètres. Nous aurons donc une intégrale complète en faisant décrire au point M une surface quelconque.

Quoi qu'il en soit, la résolution du problème de Cauchy pour la courbe C se présente maintenant de la manière suivante : on associe à chaque point M de C la surface $\Sigma_M$ correspondante et on prend l'enveloppe des surfaces $\Sigma_M$ ainsi

obtenues. Cette enveloppe pourra comprendre une ou plusieurs nappes réelles, dont le nombre variera suivant l'arc de C sur lequel on se trouve; certains arcs peuvent même être dépourvus de portions de surfaces intégrales les contenant; c'est ce qu'on aperçoit aisément en songeant au cas où le cône élémentaire $\Gamma_M$ est du second ordre : alors les arcs de C veufs de surfaces intégrales sont ceux le long desquels la tangente est intérieure à $\Gamma_M$. Les *points séparatifs* des divers arcs sur C sont dans tous les cas ceux où la tangente est située sur le cône $\Gamma_M$. En ces points, il y a en général raccord entre deux des nappes précédemment trouvées (on les obtient par l'équation $\frac{F'_q}{F'_p} = \frac{dy}{dx}$).

Il est clair que toute surface intégrale *descriptible par des caractéristiques* peut être considérée comme l'enveloppe de surfaces $\Sigma_M$ : en effet, soit S une telle surface, contenant un certain arc de la courbe C. En chaque point M de cet arc, menons $\Sigma_M$ : la bande caractéristique située sur S et issue de l'élément obtenu en associant à M le plan tangent correspondant appartient nécessairement à $\Sigma_M$, puisque $\Sigma_M$ *épuise l'ensemble de toutes les bandes caractéristiques issues du point* M. Le processus de résolution du problème de CAUCHY se trouve donc justifié sous réserve d'établir le théorème suivant :

*Il n'existe pas de surfaces intégrales non descriptibles par des caractéristiques.*

**279. Impossibilité d'intégrales non singulières, non descriptibles par des caractéristiques.** — Ce point n'est pas évident, et la prudence s'impose en pareille matière : rappelons qu'en abandonnant l'hypothèse de l'existence de certaines dérivées, M. Henri LEBESGUE a pu obtenir des surfaces non réglées applicables sur le plan [1]. Il est donc permis de chercher s'il ne se trouve pas des surfaces intégrales non singulières pour lesquelles la cote cessant d'avoir, par rapport à $x$ et $y$, des dérivées secondes, la génération par caractéristiques devient impossible. Nous allons prouver qu'il n'en est rien.

Nous utiliserons à cet effet le principe du raisonnement par lequel M. R. d'ADHÉMAR résout cette question dans ses belles *Leçons sur les principes de l'Analyse* [2].

Considérons l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

où F est une fonction telle qu'on puisse former le système caractéristique et établir l'existence de solutions de ce système par la méthode des approximations successives de M. Picard. Donnons-nous un arc de courbe C, placé de telle sorte qu'on puisse le représenter par des équations

$$x = \lambda(y), \qquad z = \mu(y)$$

et pris assez petit *pour ne contenir aucun point séparatif*, c'est-à-dire aucun point où la tangente à C soit située sur le cône élémentaire en ce point. Supposons obtenue par la méthode des caractéristiques une nappe de surface intégrale passant par cet arc. Posons

$$x = X + \lambda(Y), \qquad y = Y, \qquad z = Z + \mu(Y);$$

(1) *Intégrale, longueur, aire* (Thèse, Paris, 1902, p. 95).
(2) Tome II, p. 179 et suivantes.

par ce changement de variables, notre équation aux dérivées partielles va se transformer. Nous aurons

$$\frac{\partial Z}{\partial X}=\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial Y}=\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}\lambda'(Y)-\mu'(Y).$$

L'équation transformée sera donc

$$F\left[X+\lambda(Y), \quad Y, \quad Z+\mu(Y), \quad \frac{\partial Z}{\partial X}, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y}-\frac{\partial Z}{\partial X}\lambda'(Y)+\mu'(Y)\right]=0.$$

Considérons la dérivée du premier membre, prise par rapport à $\frac{\partial Z}{\partial X}$, lorsqu'on regarde F comme une fonction composée de cette quantité. Elle a pour valeur

$$F'_p - F'_q\lambda'(Y),$$

et elle est différente de zéro sur le petit arc considéré, vu l'absence de point séparatif sur cet arc. Nous pouvons donc résoudre l'équation précédente par rapport à $\frac{\partial Z}{\partial X}$ et l'écrire sous la forme

$$\frac{\partial Z}{\partial X}=\Phi\left(X, \ Y, \ Z, \ \frac{\partial Z}{\partial Y}\right).$$

Revenons maintenant aux notations par petites lettres, assurément plus maniables. Nous sommes donc conduits au problème suivant : soit une équation

$$p=f(x, \ y, \ z, \ q),$$

où $f$ est une fonction bien déterminée de $x$, $y$, $z$, $q$. Supposons connue une surface intégrale de cette équation, passant par un segment de l'axe O$y$, et engendrée par des multiplicités caractéristiques. Nous allons prouver l'impossibilité d'une seconde solution contenant le même segment de l'axe O$y$. Soient en effet $z=\varphi(x, y)$ la première de ces solutions et $z=\psi(x, y)$ la seconde, et posons $\omega=\varphi-\psi$. Nous raisonnons bien entendu en regardant $\varphi$ et $\psi$ comme données ($\psi$ est le fruit de la méditation de quelque géomètre malicieux, en quête de résultats paradoxaux). Il s'agit de prouver que la différence $\omega$ s'annule au voisinage du segment considéré de O$y$. Nous aurons les relations

$$\frac{\partial}{\partial x}(\omega+\psi)=f\left(x, \ y, \ \omega+\psi, \ \frac{\partial \omega}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial x}=f\left(x, \ y, \ \psi, \ \frac{\partial \psi}{\partial y}\right),$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}=f\left(x, \ y, \ \omega+\psi, \ \frac{\partial \omega}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)-f\left(x, \ y, \ \psi, \ \frac{\partial \psi}{\partial y}\right);$$

$\varphi$ et $\psi$ étant connues, il en est de même de $\omega$, et par suite la relation que nous venons d'écrire exprime seulement une identité. Si nous posons

$$f\left(x, \ y, \ \psi+\lambda\omega, \ \frac{\partial \psi}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)=\mathcal{F}(\lambda),$$

en appelant $\lambda$ une constante quelconque, nous pourrons écrire

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}=\mathcal{F}(1)-\mathcal{F}(0)=\int_0^1 \mathcal{F}'(\lambda)d\lambda;$$

or $$\mathcal{F}'(\lambda)=f'_z\omega+f'_q\frac{\partial\omega}{\partial y};$$

nous aurons donc, puisque $\omega$ et $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ sont indépendants de $\lambda$,

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\omega\int_0^1 f'_z\left(x,\ y,\ \psi+\lambda\omega,\ \frac{\partial\psi}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)d\lambda+\frac{\partial\omega}{\partial y}\int_0^1 f'_q(\ldots)d\lambda,$$

ou enfin $$\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}G(x,\ y)=\omega F(x,\ y),$$

d'où nous concluons que l'équation aux dérivées partielles linéaire

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\frac{\partial\Omega}{\partial y}G(x,\ y)=\Omega F(x,\ y)$$

admet une solution $\Omega=\omega$ qui s'annule sur le segment considéré de l'axe $Oy$. Nous allons prouver que cette solution est identiquement nulle.

En effet, d'après la manière dont F et G ont été calculés, il est facile de voir que l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}=G(x,\ y)$$

appartient à la classe de celles qui tombent sous le coup de la méthode des approximations successives de M. Picard : on peut ainsi établir que par chaque point du segment considéré de l'axe $Oy$, il passe une courbe dont la tangente au point $(x,\ y)$ a pour coefficient angulaire la valeur $G(x,\ y)$.

Dans ces conditions, notre équation auxiliaire fait connaître la dérivée logarithmique de $\Omega$ le long d'une de ces courbes, et à cause de la régularité de la fonction F d'une part, de l'annulation sur $Oy$ de $\Omega$ d'autre part, on est conduit, lorsqu'on effectue la détermination séparée de $\Omega$ sur chacune de ces courbes, à constater que $\Omega$ demeure constamment nul.

Le théorème est donc établi.

**280. Notions sur les courbes intégrales.** — Soit une équation aux dérivées partielles

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0.$$

On donne le nom de *courbes intégrales* aux lignes qui, en chacun de leurs points, ont pour tangente une génératrice du cône élémentaire. Autrement dit, tout point d'une ligne intégrale sera *séparatif*, au sens que nous avons donné à cette locution dans la résolution du problème de Cauchy. Or nous avons vu qu'aux points séparatifs isolés d'une courbe quelconque se soudent en général deux nappes de surface intégrale passant par cette courbe et douée en ses autres points de plans tangents distincts. On est donc amené naturellement à en induire que si l'on cherche à résoudre le problème de Cauchy pour une courbe intégrale, il y aura, tout le long de cette ligne, soudure de deux nappes de surfaces intégrales, de sorte que cette ligne sera par là même une arête de rebroussement. Une étude approfondie, que nous ne pouvons entreprendre, montre qu'il en est bien ainsi. Donnons seulement l'indication suivante :

Soit connue une intégrale complète de $F=0$, et soit

$$V[x,\ y,\ z,\ a,\ \varphi(a)]=0$$

une famille à un paramètre extraite de cette intégrale complète. En dérivant une première fois par rapport au paramètre $a$, nous obtiendrons les caractéristiques situées sur l'enveloppe des surfaces précédentes. Elles seront définies par

$$V = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial \varphi(a)} \varphi'(a) = 0.$$

Mais ces caractéristiques ont elles-mêmes une enveloppe, qu'on définit par une seconde dérivation, comme il est classique (nº 205). Cela posé, comme les caractéristiques appartiennent à l'ensemble des courbes intégrales, et que toute enveloppe de courbes intégrales est elle-même une courbe intégrale, il est clair que l'enveloppe des caractéristiques sur une surface intégrale est une courbe intégrale. En même temps, rappelons ce fait bien connu qu'elle est encore une arête de rebroussement de la surface. Cela confirme bien une indication donnée plus haut.

Notons pour terminer que le système des courbes intégrales est défini de la manière suivante. On obtient le cône élémentaire en chaque point $(x, y, z)$ en cherchant l'enveloppe des plans

$$Z - z = P(X - x) + Q(Y - y),$$

P et Q étant liés par la relation

$$F(x, y, z, P, Q) = 0.$$

Écrivant que

$$\frac{X - x}{F'_P} = \frac{Y - y}{F'_Q}$$

et éliminant P et Q entre ces trois équations, on obtient l'équation de ce cône, soit

$$\Gamma(x, y, z;\ X - x,\ Y - y,\ Z - z) = 0,$$

où $\Gamma$ est homogène par rapport à ses trois derniers arguments. L'équation différentielle des courbes intégrales sera donc

$$\Gamma(x, y, z;\ dx,\ dy,\ dz) = 0.$$

On voit nettement qu'elles dépendent d'une fonction arbitraire.

Reprenons encore l'équation du nº 270

$$\text{(E)} \qquad px + qy = a(p^2 + q^2).$$

On trouvera aisément que les courbes intégrales sont définies par l'équation de MONGE

$$(dx^2 + dy^2)\left[(xdy - ydx)^2 + 4adz\,(xdx + ydy) - 4a^2dz^2\right] = 0.$$

Bien entendu, parmi les solutions de cette équation figurent les courbes caractéristiques; il est d'ailleurs facile de le vérifier directement.

En rassemblant les résultats obtenus relatifs à la solution du problème de CAUCHY par la méthode des caractéristiques, on voit qu'il ne peut se présenter que trois cas distincts :

1° la courbe C, par laquelle on veut faire passer une surface intégrale, n'est pas tangente en chacun de ses points au cône élémentaire; nous avons indiqué précédemment la marche à suivre;

2° la courbe C est une courbe caractéristique;

3° la courbe C est une courbe intégrale.

Dans le second cas, la méthode générale ne fournira pas de surface intégrale, et il est facile géométriquement d'en comprendre la raison. Mais nous savons d'autre part qu'il existe dans ce cas une infinité de surfaces intégrales passant par la courbe C. Pour en obtenir une, il suffira de résoudre le problème de CAUCHY pour une courbe quelconque $\Gamma$, rencontrant C non tangentiellement et telle que le point et le plan tangent communs aux deux courbes déterminent un élément de contact intégral.

Cherchons, par exemple, à résoudre le problème de CAUCHY pour l'équation (E) et la courbe C définie par les équations

$$x = -\frac{a}{t}, \qquad y = at, \qquad z = \frac{a}{2}(t^2 - 1).$$

Dans les équations en termes finis des caractéristiques,

$$x = ap_0u + \frac{x_0 - ap_0}{u}, \qquad y = aq_0u + \frac{y_0 - aq_0}{u}, \qquad z = z_0 + \frac{a}{2}(p_0^2 + q_0^2)(u^2 - 1),$$
$$p = p_0u, \qquad q = q_0u,$$

on devra poser d'abord

$$x_0 = -\frac{a}{t}, \qquad y_0 = at, \qquad z_0 = \frac{a}{2}(t^2 - 1);$$

on aura ensuite, pour déterminer $p_0$ et $q_0$, les équations

$$p_0x_0 + q_0y_0 = a(p_0^2 + q_0^2), \qquad \frac{dz_0}{dt} = p_0\frac{dx_0}{dt} + q_0\frac{dy_0}{dt},$$

d'où l'on tire

$$p_0 = 0, \qquad q_0 = t.$$

La multiplicité intégrale passant par la courbe C est alors définie par les équations

$$x = -\frac{a}{tu}, \qquad y = atu, \qquad z = \frac{a}{2}(t^2u^2 - 1), \qquad p = 0, \qquad q = tu;$$

c'est en réalité une multiplicité à *une* dimension ayant pour support ponctuel la courbe C; on peut vérifier directement que cette multiplicité est une bande caractéristique.

La méthode générale ne donne donc pas de *surface* intégrale passant par C. Pour en avoir une, choisissons un élément de contact de la bande caractéristique associée à C, par exemple l'élément qui correspond à $t = 1$,

$$-a \qquad a \qquad 0 \qquad 0 \qquad 1.$$

Toute courbe qui admet cet élément de contact sans être tangente à C au point correspondant détermine une surface intégrale passant par C.

On pourra, en particulier, prendre la droite

$$x_0 = v, \qquad y_0 = a, \qquad z_0 = 0,$$

avec

$$p_0 = 0, \qquad q_0 = 1,$$

valeurs qui satisfont à la relation $dz_0 = p_0dx_0 + q_0dy_0$ et à l'équation (E); on obtient ainsi le cylindre parabolique

$$2az = y^2 - a^2.$$

On peut aussi, et cette remarque est générale, former l'équation de la surface engendrée par toutes les courbes caractéristiques issues d'un point de C, par exemple du point $(-a, a, 0)$ : on trouve alors la surface du troisième degré

$$4az^2 + 2z(2a^2 - x^2 - y^2) - a(x+y)^2 = 0,$$

qui admet le point $(-a, a, 0)$ comme point conique, et passe bien par la caractéristique C.

Enfin dans le troisième cas (courbe intégrale), on trouvera, comme dans le premier, une solution unique au problème de CAUCHY, mais la courbe C sera une ligne singulière de la surface obtenue.

Prenons par exemple comme courbe C l'hélice circulaire

$$x_0 = 2a\cos\omega, \qquad y_0 = 2a\sin\omega, \qquad z_0 = 2a\omega,$$

qui est une courbe intégrale. On trouve

$$p_0 = \cos\omega - \sin\omega, \qquad q_0 = \sin\omega + \cos\omega,$$

et, en posant $\omega = \frac{\pi}{4} + \varphi$, $b = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$, on a pour la surface cherchée les équations paramétriques

$$x = a\sqrt{2}\left(\frac{\cos\varphi}{u} - u\sin\varphi\right), \qquad y = a\sqrt{2}\left(\frac{\sin\varphi}{u} + u\cos\varphi\right), \qquad z = 2a\varphi + au^2 + b.$$

Les courbes $u = C^{te}$ sont des hélices circulaires d'axe $Oz$; en particulier la courbe C correspond à $u = 1$.

On trouvera, pour les coefficients du plan tangent à cette surface,

$$A = 2a^2\sqrt{2}\left(\frac{1}{u^2} - u^2\right)\sin\varphi, \qquad B = -2a^2\sqrt{2}\left(\frac{1}{u^2} - u^2\right)\cos\varphi, \qquad C = 2a^2u\left(\frac{1}{u^4} - 1\right);$$

la courbe $u = 1$ (qui est identique d'ailleurs à $u = -1$) est donc bien une ligne singulière de la surface. On vérifiera sans peine qu'elle enveloppe les caractéristiques.

**281. Remarques sur les intégrales singulières.** — Tout ce que nous avons dit au sujet des multiplicités caractéristiques et du problème de CAUCHY pourrait, dans le cas d'une équation $p = f(x, y, z, q)$ analytique et d'une courbe C analytique, se transposer assez facilement au champ complexe. Mais nous laisserons cette étude de côté, en renvoyant le lecteur aux traités spéciaux, notamment à l'ouvrage de M. GOURSAT sur les équations du premier ordre.

La théorie des intégrales singulières peut être elle-même développée indifféremment, soit dans le champ complexe (c'est ce qu'on fait le plus fréquemment), soit dans le domaine réel. A ce dernier point de vue nous allons en dire quelques mots.

Considérons d'abord une équation différentielle ordinaire, ou, ce qui revient au même, un système de la forme

$$f(x, z, p) = 0, \qquad p = \frac{dz}{dx}.$$

De ces deux équations, la première définit $p$ en fonction implicite de $x$ et de $z$. Soient $x_0$, $z_0$, $p_0$ trois nombres satisfaisant à cette équation. Supposons

que les fonctions $f'_x$, $f'_z$, $f'_p$ existent et soient continues autour de $(x_0, z_0, p_0)$, et que l'on ait $f'_{p_0} \neq 0$. Alors il existe une fonction $p(x, z)$ et une seule, satisfaisant à $f=0$, se réduisant à $p_0$ en $(x_0, z_0)$ et admettant par rapport à $x$ et $z$ des dérivées continues du premier ordre. On pourra donc établir qu'il existe une intégrale et une seule de l'équation

$$\frac{dz}{dx} = p(x, z)$$

passant par le point $(x_0, z_0)$, en appliquant sous sa forme classique la méthode de M. PICARD (approximations successives).

Il n'en est plus ainsi lorsque $f'_{p_0} = 0$. Le point $(x_0, z_0)$ est alors, dans le plan des $(x, z)$, sur la frontière du domaine d'existence de la fonction implicite $p(x, z)$ (ou au moins de certaines de ses branches). On peut encore dire que le point $(x_0, z_0, p_0)$ appartient au contour apparent de la surface $f(x, z, p) = 0$ (système d'axes $Ox$, $Oz$, $Op$).

Or l'équation $p = \frac{dz}{dx}$ nous donne en chaque point de cette surface une direction $\Delta$ du plan tangent, définie par le système des deux équations

$$(X - x)f'_x + (Z - z)f'_z + (P - p)f'_p = 0,$$
$$Z - z - p(X - x) = 0.$$

Les courbes intégrales de notre équation différentielle sont les projections sur le plan $xOz$ des courbes de la surface tangentes à cette direction en chaque point. Par cette remarque, nous transformons le problème étudié, singulier dans le plan $xOz$, en un problème régulier (c'est-à-dire tombant sous le coup des méthodes ordinaires) pour la surface $f=0$. Plaçons-nous sur le contour apparent : en chaque point de cette courbe, la direction $\Delta$ est parallèle à $Op$. Moyennant quelques hypothèses supplémentaires faciles à formuler, on pourra donc résoudre l'équation $f=0$ par rapport à $z$ par exemple, l'essentiel étant d'éviter une explicitation en $p$, et déterminer, au voisinage du point considéré sur le contour apparent, les courbes intégrales de la surface en projection sur le plan des $xp$ (ce que la méthode de M. PICARD permet de faire). On reviendra ensuite, par l'intermédiaire de la surface, au plan des $xz$.

L'intuition géométrique donne alors une idée suffisante des résultats qui pourront être légitimés moyennant des hypothèses et une déduction convenables, dont l'ensemble est assez nettement indiqué par ce qui précède. Les courbes intégrales de la surface couperont en général le contour apparent de manière à admettre pour tangente en chaque point d'intersection avec cette courbe une parallèle à $Op$, c'est-à-dire à la direction de projection. Il s'ensuivra que, sur la frontière du domaine d'existence de la fonction $p(x, z)$, dans le plan $xOz$, les courbes intégrales auront en général des points de rebroussement. La tangente de rebroussement sera la trace sur le plan $xOz$

du plan osculateur à la courbe de la surface au point situé sur le contour apparent. Dans le cas et dans le cas seulement où ce plan coïncide le long de toute cette courbe avec le plan tangent (c'est-à-dire où le contour apparent est une asymptotique), sa projection sur le plan $xOz$ fournira une intégrale singulière de l'équation différentielle.

L'existence d'une intégrale singulière, lorsqu'on part de l'équation différentielle et qu'on formule les hypothèses qui, relativement à cette manière de poser le problème, se présentent comme les plus naturelles et les plus simples, apparaît donc comme un fait exceptionnel. Au contraire, si l'on part d'une famille de courbes $f(x, y, a) = 0$, et si, relativement à cette nouvelle manière de poser le problème, on formule encore les hypothèses les plus naturelles et les plus simples, l'existence d'une intégrale singulière apparaît comme un fait normal, qui peut se trouver en défaut dans des circonstances exceptionnelles, car en cherchant l'enveloppe, on trouve aussi les lieux de points singuliers [1]. Il n'y a aucune contradiction entre ces deux résultats, qui sont les conclusions de deux systèmes d'hypothèses entièrement distincts. Notons seulement avec Clebsch que de tels renversements de probabilité se présentent ailleurs, notamment à propos des courbes algébriques planes : si l'on donne au hasard l'équation ponctuelle, la courbe obtenue offre des singularités tangentielles, sans présenter en général de singularités ponctuelles ; et inversement.

De même, si l'on part d'une équation $F(x, y, z, p, q) = 0$, en faisant sur F les hypothèses les plus simples et les plus naturelles (par exemple en supposant que F soit un polynome), l'existence d'une intégrale singulière est un fait exceptionnel. Supposons-la réalisée et représentons-nous une intégrale complète, c'est-à-dire une famille de surfaces à deux paramètres, admettant pour enveloppe cette intégrale singulière. Alors, de chaque élément de contact de cette dernière surface sont issues des multiplicités caractéristiques formant une famille à un paramètre. Donc, sur l'intégrale singulière, en raison de cette indétermination, les dénominateurs du système caractéristique devront tous s'annuler. On devra donc avoir simultanément

$$F = 0, \qquad F'_p = 0, \qquad F'_q = 0, \qquad F'_x + pF'_z = 0, \qquad F'_y + qF'_z = 0.$$

Il est clair que si F est pris au hasard, il ne saurait en général exister de surface répondant simultanément à ces cinq conditions. Si exceptionnellement cette éventualité se produit, on obtiendra une surface intégrale qui cesse d'être un lieu de multiplicités caractéristiques. Nous nous en tiendrons ici à ces indications, en renvoyant, pour une étude systématique de cette délicate question, aux travaux de Darboux et de M. Goursat.

---

(1) Les fonctions qui, annulées, représentent les courbes ainsi obtenues, sont en facteur dans le premier membre F de l'équation différentielle $F = 0$ formée par élimination. On perd en quelque sorte, dans cette équation simplifiée, la trace des lieux de points doubles, mais les lieux de points de rebroussement s'y révèlent nécessairement par la coïncidence de deux déterminations de coefficient angulaire.

## CHAPITRE III

## SUR LES ÉQUATIONS DE LA CLASSE DE MONGE ET D'AMPÈRE

**282. Position du problème.** — Pour terminer cet exposé, nous allons donner quelques brèves indications sur une classe d'équations du second ordre, dont l'étude remonte aux travaux de MONGE et d'AMPÈRE, et dont le champ d'applications, très vaste, englobe notamment le problème de la déformation des surfaces.

Notre guide sera un simple rapprochement entre la théorie des équations du premier ordre et celle des équations du second. Résumons d'abord quelques points particuliers de la première.

On peut, dans l'ensemble des équations du premier ordre, mettre à part celles qui sont linéaires en $p$ et $q$. On les distingue de deux manières :

1° en écrivant qu'elles admettent l'intégrale générale

$$B(x, y, z) = \varphi[A(x, y, z)],$$

où A, B désignent deux fonctions données de $x$, $y$, $z$, et $\varphi[A]$ une fonction arbitraire de A;

2° en écrivant qu'on peut en obtenir les *lignes* caractéristiques indépendamment des *bandes* caractéristiques. On peut dire aussi que l'on a pour ces lignes caractéristiques, dans le cas étudié, une génération purement ponctuelle, et que cela cesse d'être vrai pour les équations non linéaires en $p$ et $q$.

Passons aux équations du second ordre,

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{1}$$

et cherchons à distinguer dans l'ensemble très vaste de ces équations certains types faciles à étudier. Nous adopterons alors le programme suivant :

1° Nous chercherons d'abord s'il est possible de trouver des équations (1) pour lesquelles il existe une *intégrale intermédiaire* de la forme

$$B(x, y, z, p, q) = \varphi[A(x, y, z, p, q)], \tag{2}$$

A et B désignant encore deux fonctions données de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ et $\varphi$ une fonction arbitraire de A. Dans les cas où cette question sera résolue par l'affirmative, il suffira d'appliquer la théorie des équations du premier ordre aux équations (2) ainsi obtenues.

2° Nous pourrons ensuite chercher à étendre la notion de multiplicités

caractéristiques, et voir si elle conduit encore à distinguer certains types d'équations. Nous dirons alors que l'équation (1) est l'équation même d'une quelconque de ses surfaces intégrales, lorsqu'on considère une génération surabondante de cette surface consistant à donner à la fois

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t$$

en fonction de deux paramètres arbitraires. Les conditions de compatibilité sont exprimées par les relations

$$(3) \qquad dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy, \qquad dz = p\,dx + q\,dy.$$

Dès maintenant il est donc naturel d'introduire la notion d'*élément de contact du second ordre*. On appelle ainsi l'ensemble des huit nombres $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, $r$, $s$, $t$. On peut concevoir géométriquement un tel élément comme un point *armé* d'une petite portion de surface du second degré passant par ce point; cette surface est à choisir *ad libitum* dans une famille dépendant linéairement de trois paramètres (car on doit écrire que pour $x-x_0=y-y_0=0$, les quantités $z$, $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ acquièrent respectivement des valeurs données, ce qui fait six conditions imposées aux neuf paramètres indépendants qui figurent dans l'équation générale des quadriques). L'espace comprend $\infty^8$ éléments du second ordre, et il en existe $\infty^3$ qui ont en commun un élément du premier ordre arbitrairement choisi.

On voit pareillement qu'on pourrait, dans la théorie des équations d'ordre $n$, introduire des éléments de contact d'ordre $n$. Cette généralisation systématique de la notion d'élément de contact offre déjà l'avantage suivant : elle nous amène à introduire la notion d'*élément de contact d'ordre zéro*, c'est naturellement un point $(x, y, z)$ désarmé.

La notion de multiplicité subira dès lors une extension du même ordre. Nous n'avons considéré jusqu'ici que des multiplicités, à une ou deux dimensions, formées d'éléments de contact du premier ordre : appelons-les multiplicités d'ordre *un*. Nous appellerons multiplicités d'ordre *deux*, à une ou deux dimensions, un ensemble, à un ou deux paramètres, d'éléments de contact du second ordre vérifiant les relations (3).

En résumé, la génération des surfaces peut être envisagée :

1° *Au moyen d'éléments de contact d'ordre zéro* : c'est la génération la plus ordinaire, celle qui ne comporte aucune condition de compatibilité;

2° *Au moyen d'éléments de contact* $(x, y, z, p, q)$ *d'ordre un*; c'est celle de la théorie des équations du premier ordre. Elle nécessite deux conditions de compatibilité impliquées par $dz = p\,dx + q\,dy$;

3° *Au moyen d'éléments de contact du second ordre*. Elle nécessite les conditions de compatibilité impliquées par les équations (3). L'équation $dz = p\,dx + q\,dy$ en fournit deux distinctes, le système des équations $dp = r\,dx + s\,dy$, $dq = s\,dx + t\,dy$ en donne seulement *trois* distinctes : en

effet supposons qu'on ait pris $x$, $y$ comme paramètres; les relations de compatibilité s'exercent alors entre les fonctions $z(x, y)$, $p(x, y)$, $q(x, y)$, $r(x, y)$, $s(x, y)$, $t(x, y)$, et elles fournissent bien évidemment, en raison de l'indépendance de l'ordre des dérivations (qui veut que $p'_y = q'_x$), cinq relations seulement :

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad s = \frac{\partial p}{\partial y}\left(\text{ou } \frac{\partial q}{\partial x}\right), \qquad t = \frac{\partial q}{\partial y}.$$

On pourrait évidemment ne pas s'arrêter. Quoi qu'il en soit, nous disposons maintenant d'une terminologie très commode qui nous permet par exemple de dire : *les équations linéaires en p et q se distinguent parmi toutes les équations possibles du premier ordre par la propriété d'admettre des caractéristiques d'ordre zéro.*

Lorsque nous aurons étendu la notion de caractéristiques aux équations (1) au moyen des éléments de contact du second ordre, nous pourrons donc nous proposer de chercher si parmi celles-ci il en est qui se contentent de caractéristiques d'ordre un. Nous sommes fondés à penser qu'à la faveur de cette circonstance elles se montreront peut-être moins intraitables. D'ailleurs les deux routes que nous allons suivre convergeront.

**283. Équations susceptibles d'admettre une intégrale intermédiaire. —** Supposons que, indépendamment du choix de la fonction arbitraire $\varphi(A)$, toute intégrale de l'équation du premier ordre

$$B(x, y, z, p, q) = \varphi[A(x, y, z, p, q)]$$

soit aussi une intégrale de l'équation du second ordre

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Alors nous allons prouver que cette dernière ne saurait être de forme quelconque. En effet, on peut la déduire de la relation

$$B = \varphi(A)$$

en exprimant que A et B, envisagées comme fonctions composées de $x$, $y$ (par l'intermédiaire de $z$, $p$, $q$), ne sont pas indépendantes. On obtient ainsi

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} + p\frac{\partial A}{\partial z} + r\frac{\partial A}{\partial p} + s\frac{\partial A}{\partial q} & \frac{\partial A}{\partial y} + q\frac{\partial A}{\partial z} + s\frac{\partial A}{\partial p} + t\frac{\partial A}{\partial q} \\ \frac{\partial B}{\partial x} + p\frac{\partial B}{\partial z} + r\frac{\partial B}{\partial p} + s\frac{\partial B}{\partial q} & \frac{\partial B}{\partial y} + q\frac{\partial B}{\partial z} + s\frac{\partial B}{\partial p} + t\frac{\partial B}{\partial q} \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$\frac{D(A, B)}{D(x, y)} + q\frac{D(A, B)}{D(x, z)} - p\frac{D(A, B)}{D(y, z)} + t\frac{D(A, B)}{D(x, q)} + s\left[\frac{D(A, B)}{D(x, p)} - \frac{D(A, B)}{D(y, q)}\right]$$
$$- r\frac{D(A, B)}{D(y, p)} + (ps - qr)\frac{D(A, B)}{D(z, p)} + (pt - qs)\frac{D(A, B)}{D(z, q)} + (rt - s^2)\frac{D(A, B)}{D(p, q)} = 0;$$

finalement, notre équation du second ordre s'écrit donc

$$\text{(4)} \qquad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

H, K, L, M, N dépendant exclusivement des variables $x$, $y$, $z$, $p$, $q$.

Nous appellerons ÉQUATION DE MONGE-AMPÈRE toute équation de la forme (4). D'après cela, *s'il existe pour* $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ *une intégrale intermédiaire de la forme* (2), *cette équation appartient au type de* MONGE-AMPÈRE.

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie : autrement dit, c'est seulement pour une classe spéciale d'équations de Monge-Ampère qu'il existe des intégrales intermédiaires de la forme (2). Nous admettrons ici ce point très important de la théorie.

**284. Équations admettant des caractéristiques du premier ordre.** — Dans la théorie des équations aux dérivées partielles d'ordre $n$, le problème de CAUCHY consiste à trouver une surface intégrale passant par une multiplicité composée d'une famille à un paramètre d'éléments de contact d'ordre $n - 1$. Par exemple, dans le cas d'une équation du second ordre, on cherche une surface épousant une *bande* donnée, c'est-à-dire passant par une courbe et ayant le long de cette courbe une certaine succession de plans tangents : nous avons en effet appelé *bande* une multiplicité à un paramètre d'éléments de contact du premier ordre.

Nous appellerons *multiplicités caractéristiques* les multiplicités pour lesquelles le problème de CAUCHY devient indéterminé. Cette indétermination nous apparaîtra dans le calcul des dérivées successives de la fonction $z(x, y)$ représentant les cotes d'une surface intégrale (il s'agit des dérivées prises en un point de la bande imposée par l'énoncé à cette surface). Pour les équations

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

on peut mettre en évidence un phénomène que nous avons déjà observé pour le premier ordre : c'est l'impossibilité de définir les multiplicités caractéristiques au moyen d'éléments de contact du premier ordre seulement; autrement dit il faut en général introduire des multiplicités caractéristiques d'ordre deux à une dimension. C'est seulement en passant par l'intermédiaire de ces multiplicités, et en en détachant les bandes qui leur appartiennent (on écartera dans ce but $r$, $s$, $t$ pour ne considérer exclusivement que $x$, $y$, $z$, $p$, $q$), qu'on trouvera les bandes jouant un rôle exceptionnel dans la théorie du problème de CAUCHY.

Dans le cas des équations du premier ordre

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

on cherche une surface intégrale passant par une multiplicité formée par une famille à un paramètre d'éléments de contact d'ordre zéro, donc par une courbe

$$x = x(\lambda), \qquad y = y(\lambda), \qquad z = z(\lambda).$$

Les dérivées premières $p$ et $q$ de $z(x, y)$ en un point de cette courbe se calculent par la résolution des deux équations simultanées

$$F(x, y, z, p, q)=0,$$
$$\frac{dz}{d\lambda}=p\frac{dx}{d\lambda}+q\frac{dy}{d\lambda},$$

qui les déterminent pour chaque valeur de $\lambda$, c'est-à-dire pour tout choix d'un point sur la courbe. L'équation aura des caractéristiques d'ordre zéro dans le seul cas où une indétermination se présente dès le calcul de $p$ et de $q$. Il faut pour cela que les deux courbes du plan $(p, q)$ définies pour chaque système de valeurs $x, y, z$ par les équations précédentes, puissent coïncider, donc que l'équation $F=0$ représente une droite (quels que soient $x, y, z$) dans le plan $(p, q)$, ou enfin qu'elle soit linéaire en $p, q$ (ou au moins réductible à une telle forme) (¹).

Cela nous amène à distinguer les équations du premier ordre du type

$$Pp+Qq=R.$$

La condition d'indétermination de $p$ et de $q$ dans la résolution du système précédent est évidemment

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R};$$

elle nous donne bien la forme classique du système des multiplicités caractéristiques qui sont ici d'ordre zéro.

Passons maintenant aux équations du second ordre

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0,$$

et soit à résoudre le problème de Cauchy pour une bande déterminée par les cinq équations

$$x=x(\lambda), \qquad y=y(\lambda), \qquad z=z(\lambda), \qquad p=p(\lambda), \qquad q=q(\lambda);$$

les seconds membres ne peuvent être donnés arbitrairement. Il faut les choisir en respectant la condition

$$z'(\lambda)=p(\lambda)x'(\lambda)+q(\lambda)y'(\lambda).$$

Pour écrire que l'équation admet des caractéristiques d'ordre un, nous devrons formuler cette condition : une indétermination dans le calcul des dérivées successives de $z(x, y)$ en un point de la bande précédente doit se

(¹) Cette indétermination ne se produit pas pour les équations non linéaires en $p$ et $q$ (voir l'exemple étudié au n° 280) : mais alors nous avons montré justement que les intégrales *se raccordent* le long des bandes caractéristiques, autrement dit qu'une telle bande est complètement déterminée dès qu'on connaît son support ponctuel.

produire dès qu'on cherche $r$, $s$, $t$. Or, en chaque point de la bande, ces inconnues sont astreintes à vérifier les équations

$$(5)\quad \begin{cases} F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \\ \dfrac{dp}{d\lambda} = r\dfrac{dx}{d\lambda} + s\dfrac{dy}{d\lambda}, \\ \dfrac{dq}{d\lambda} = s\dfrac{dx}{d\lambda} + t\dfrac{dy}{d\lambda}. \end{cases}$$

Considérons pour chaque système de valeurs $(x, y, z, p, q)$ l'espace auxiliaire lieu du point $(r, s, t)$. Nos deux dernières équations expriment que ce point décrit une droite. Sa parallèle menée par l'origine est

$$r\frac{dx}{d\lambda} + s\frac{dy}{d\lambda} = 0,$$
$$s\frac{dx}{d\lambda} + t\frac{dy}{d\lambda} = 0;$$

cette droite décrit le cône

$$rt - s^2 = 0.$$

Donc, il ne pourra y avoir indétermination dans le calcul de $r$, $s$, $t$ que dans le cas suivant : *pour chaque système de valeurs $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ l'équation $F = 0$ représente une surface réglée dont le cône directeur est $rt - s^2 = 0$.*

Ce cas est beaucoup plus général que celui de l'équation de MONGE-AMPÈRE (bien qu'il particularise déjà une classe d'équations, mais elle est encore trop vaste pour notre modeste programme).

Le cas de MONGE et d'AMPÈRE, où notre équation s'écrit

$$(6)\qquad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

est manifestement *celui où notre surface réglée se réduit à une quadrique.* Il a une importance particulière par ce fait que nous avons maintenant deux systèmes de génératrices rectilignes au lieu d'un seul.

En matière de caractéristiques, nous sommes ainsi amenés à la conclusion suivante :

*Il y a deux systèmes de multiplicités caractéristiques du premier ordre dans le cas et dans le seul cas où l'équation $F = 0$ est du type de* MONGE-AMPÈRE.

Nous allons déterminer ces caractéristiques en écrivant les systèmes différentiels correspondants. Le calcul à effectuer est simplement la recherche des génératrices rectilignes de la quadrique définie par l'équation (6). Écrivons-la [1]

$$(Nr + L)(Nt + H) - N^2s^2 + 2KNs + MN - HL = 0;$$

les termes hors des parenthèses forment un trinome du second degré en $s$.

---

[1] GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. III, p. 56.

Nous pouvons donc, en décomposant ce trinome en un produit de deux facteurs, mettre cette équation sous la forme

$$(7) \qquad (\mathrm{N}r+\mathrm{L})(\mathrm{N}t+\mathrm{H})-(\mathrm{N}s+\Phi)(\mathrm{N}s+\Psi)=0,$$

$\Phi$ et $\Psi$ étant, comme H, K, L, M, N, deux fonctions connues de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$. Remarquons toutefois qu'elles peuvent être imaginaires : ce sont les deux racines de l'équation

$$\lambda^2+2\mathrm{K}\lambda+\mathrm{HL}-\mathrm{MN}=0.$$

Sous la forme (7), nous avons immédiatement les deux systèmes de génératrices

$$(8) \quad \begin{cases} \mathrm{N}r+\mathrm{L}=\mu(\mathrm{N}s+\Phi), \\ \mathrm{N}t+\mathrm{H}=\dfrac{1}{\mu}(\mathrm{N}s+\Psi), \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (9) \quad \begin{cases} \mathrm{N}r+\mathrm{L}=\mu(\mathrm{N}s+\Psi), \\ \mathrm{N}t+\mathrm{H}=\dfrac{1}{\mu}(\mathrm{N}s+\Phi); \end{cases}$$

il nous reste à écrire que la droite

$$r\,dx+s\,dy=dp, \qquad s\,dx+t\,dy=dq$$

appartient à l'un de ces systèmes. Pour qu'elle appartienne au premier système, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer $\mu$ de manière à avoir les proportions

$$(10) \qquad \frac{dx}{\mathrm{N}}=\frac{dy}{-\mu\mathrm{N}}=\frac{dp}{\mu\Phi-\mathrm{L}}=\frac{dq}{\mu\mathrm{H}-\Psi};$$

pour qu'elle appartienne au second système, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer $\mu$ de manière à avoir les proportions

$$(11) \qquad \frac{dx}{\mathrm{N}}=\frac{dy}{-\mu\mathrm{N}}=\frac{dp}{\mu\Psi-\mathrm{L}}=\frac{dq}{\mu\mathrm{H}-\Phi},$$

(le système (11) se déduit de (10) par permutation de $\Phi$ et $\Psi$).

Si nous éliminons $\mu$ entre les équations (10), ou encore entre les équations (11), nous obtenons respectivement les deux systèmes

$$(10)' \qquad \begin{cases} \mathrm{N}dp+\mathrm{L}dx+\Phi\,dy=0, \\ \mathrm{N}dq+\Psi\,dx+\mathrm{H}dy=0, \end{cases}$$

et

$$(11)' \qquad \begin{cases} \mathrm{N}dp+\mathrm{L}dx+\Psi\,dy=0, \\ \mathrm{N}dq+\Phi\,dx+\mathrm{H}dy=0, \end{cases}$$

qui complétés chacun par l'équation $dz=p\,dx+q\,dy$, nous fournissent les deux systèmes de caractéristiques du premier ordre (¹).

Signalons brièvement les résultats suivants, d'ailleurs intuitifs :

1° Chaque surface intégrale peut être engendrée par une famille à un paramètre de multiplicités caractéristiques du premier système ou par une famille à un paramètre de multiplicités caractéristiques du second système.

2° Si l'on fait une transformation de contact

$$\mathrm{X}=\mathrm{X}(x,y,z,p,q), \qquad \ldots, \qquad \mathrm{Q}=\mathrm{Q}(x,y,z,p,q),$$

(¹) Tout ce calcul suppose essentiellement $\mathrm{N}\neq 0$. Le cas $\mathrm{N}=0$ est examiné au n° 285.

notre équation qui se distingue par la propriété de posséder deux systèmes de multiplicités caractéristiques du premier ordre se transformera en une autre équation jouissant de la même propriété, donc en une nouvelle équation de Monge-Ampère.

Par ces propriétés, la théorie de ces équations spéciales se présente comme un prolongement direct de la théorie des équations du premier ordre.

Insistons maintenant sur une différence essentielle.

Dans le cas des équations du premier ordre, les quatre fonctions $y$, $z$, $p$, $q$ de la variable $x$ vérifiaient, le long d'une multiplicité caractéristique, un système comprenant l'équation finie $F=0$ et *trois* équations différentielles. Les multiplicités caractéristiques dépendaient donc de *trois* constantes.

Dans le cas actuel, entre les *quatre* fonctions $y$, $z$, $p$, $q$ de $x$ nous n'avons plus que *trois* équations. Ainsi donc, l'une de ces quatre fonctions peut être déterminée arbitrairement. Par suite, *les multiplicités caractéristiques de chaque système dépendent d'une fonction arbitraire de* $x$ (ou plus généralement, d'une fonction arbitraire de la variable choisie pour spécifier un élément quelconque sur une multiplicité caractéristique déterminée).

**285. Types particuliers d'équations de Monge-Ampère.** — 1° Il peut d'abord arriver que, pour chaque système de valeurs $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, notre équation en $r$, $s$, $t$ représente un cône. Les deux systèmes de génératrices et par suite aussi les deux systèmes de multiplicités caractéristiques dégénèrent alors en un seul. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait

$$K^2+MN-HL=0$$

(de manière que $\Phi=\Psi$).

Ce cas, dans lequel on dit que l'équation est du type *parabolique*, sépare évidemment celui où les multiplicités caractéristiques des deux systèmes sont réelles (type *hyperbolique*) et celui où ces multiplicités sont imaginaires (type *elliptique*) (1).

2° Un autre cas digne d'attention est le cas où $N=0$. La quadrique représentée par l'équation donnée dans l'espace $r$, $s$, $t$ se réduit alors à un plan. Cependant, on trouve bien encore deux systèmes de multiplicités caractéristiques en écrivant que les équations

$$\left\{\begin{aligned} &Hr+2Ks+Lt+M=0,\\ &rdx+sdy-dp=0,\\ &sdx+tdy-dq=0,\end{aligned}\right.$$

sont dépendantes. Cette dépendance se traduit d'abord par la condition (déterminant principal)

$$\begin{vmatrix} H & 2K & L\\ dx & dy & 0\\ 0 & dx & dy\end{vmatrix}=0,$$

(1) L'équation n'est pas nécessairement du même type pour tous les éléments de contact d'ordre un qu'il soit possible d'imaginer.

ou

(12) $$H dy^2 - 2K dx dy + L dx^2 = 0,$$

ensuite par la condition (déterminant caractéristique)

(13) $$\begin{vmatrix} H & 2K & -M \\ dx & dy & dp \\ 0 & dx & dq \end{vmatrix} = 0;$$

de l'équation (12) on tirera deux valeurs possibles de $\frac{dy}{dx}$ (1)

(12′) $dy = \alpha dx$, (12″) $dy = \beta dx$,

$\alpha$ et $\beta$ étant des fonctions connues de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$. En portant l'une de ces valeurs dans (13), nous aurons par exemple

(13′) $$(\alpha H - 2K)\frac{dq}{dx} - H\frac{dp}{dx} - M = 0;$$

les équations (12′) et (13′) complétées par

(14) $$dz = p dx + q dy$$

définissent la première famille de caractéristiques; on aurait la seconde en changeant $\alpha$ en $\beta$.

Un cas plus particulier encore est celui des équations

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0,$$

où H, K et L sont des fonctions de $x$ et $y$ seuls. On peut, dans ce cas, intégrer l'équation (12).

**286. Relation entre une intégrale intermédiaire éventuelle et les caractéristiques.** — Soit une équation de MONGE-AMPÈRE choisie de façon à admettre une intégrale intermédiaire

(15) $$\varphi[A(x, y, z, p, q), B(x, y, z, p, q)] = 0;$$

pour chaque choix de la fonction $\varphi$, nous connaîtrons donc une équation du premier ordre dont les solutions satisferont à la proposée. D'après la manière même dont nous avons défini les caractéristiques, il est clair que les multiplicités caractéristiques de toute équation (15) seront aussi des multiplicités caractéristiques de la proposée. On rend ainsi plus tangible, sur cet exemple, l'intervention d'une fonction arbitraire dans les équations des caractéristiques.

Cela posé, il est intuitif (et nous l'admettons) que *l'un des systèmes de multiplicités caractéristiques* de l'équation étudiée sera épuisé par celles de toutes les équations qu'on obtient en choisissant arbitrairement la fonction $\varphi$.

---

(1) Si $\alpha$ et $\beta$ sont réels, on aura encore une équation du type hyperbolique,
$\alpha$ et $\beta$ — confondus, — parabolique,
$\alpha$ et $\beta$ — imaginaires, — elliptique.

On prévoit en outre que A et B seront deux intégrales premières du système différentiel qui définit ces caractéristiques : en effet toute caractéristique appartient à une infinité d'équations de la forme $\varphi(A, B) = 0$, c'est-à-dire que sur toute caractéristique A et B vérifient une infinité de relations, ce qui ne peut évidemment arriver que si A et B restent constants sur cette caractéristique, autrement dit si A et B sont des intégrales premières du système différentiel considéré.

On déduit de ces considérations la marche à suivre pour rechercher si une équation de MONGE-AMPÈRE admet une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire : il faut pour cela et il suffit que l'un des systèmes différentiels qui définissent les caractéristiques admettent deux intégrales premières

$$A(x, y, z, p, q) = C^{te}, \qquad B(x, y, z, p, q) = C^{te}.$$

Lorsqu'il en est ainsi, l'intégration de l'équation proposée est ramenée à celle de l'équation du premier ordre

$$B = \psi(A).$$

Sans insister davantage, nous allons montrer sur deux exemples comment on cherche pratiquement à diriger l'intégration.

I. *Intégrer l'équation*

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0.$$

Dans l'espace $(r, s, t)$, cette équation représente un plan. On obtient les caractéristiques en écrivant que la droite

$$rdx + sdy = dp, \qquad sdx + tdy = dq$$

appartient à ce plan, ce qui donne les deux conditions

$$x^2dy^2 - 2xydxdy + y^2dx^2 = 0,$$
$$x^2dpdy + y^2dqdx = 0.$$

La première se réduit à

$$xdy - ydx = 0.$$

Il n'y a donc qu'un système de caractéristiques (équation du type parabolique), défini par les équations

$$xdy - ydx = 0, \qquad x^2dpdy + y^2dqdx = 0, \qquad dz - pdx - qdy = 0.$$

En tenant compte de la première on peut écrire la seconde

$$xdp + ydq = 0,$$

et l'on aperçoit alors les deux combinaisons intégrables

$$d\frac{y}{x} = 0, \qquad d(z - px - qy) = 0.$$

L'équation proposée est donc équivalente à l'équation du premier ordre

$$z - px - qy = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

où figure une fonction arbitraire, $\varphi$. L'intégration de cette équation ne présente pas de difficulté, mais on arrive plus vite au résultat en observant que l'équation

$$d\left(p+\frac{y}{x}q\right)=0$$

est aussi une combinaison intégrable du système différentiel des caractéristiques. On peut donc écrire, $\psi$ désignant une nouvelle fonction arbitraire,

$$p+\frac{y}{x}q=\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

et par suite

$$z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

On a ainsi, *sous forme explicite*, l'intégrale générale de l'équation proposée. Cette équation, on le voit maintenant *a posteriori*, peut être ramenée, par le changement de variables

$$x=u, \qquad y=uv,$$

à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=0,$$

dont l'intégration est immédiate.

II. *Intégrer l'équation*

$$rt-s^2=pqs.$$

On obtient les caractéristiques en écrivant que, dans l'espace $(r, s, t)$, la droite

$$rdx+sdy=dp, \qquad sdx+tdy=dq$$

est située sur la quadrique

$$rt-s^2=pqs,$$

ce qui donne les deux systèmes différentiels

$$\begin{cases} dp=0, \quad dq+pqdx=0, \\ dz-pdx-qdy=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} dq=0, \quad dp+pqdy=0, \\ dz-pdx-qdy=0. \end{cases}$$

L'équation proposée est donc du type hyperbolique.

Chacun des systèmes ci-dessus fournit une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire, que nous écrirons sous la forme

$$\log q+px=p\theta_1(p), \qquad \log p+qy=q\theta_2(q).$$

Lorsque les deux systèmes de caractéristiques supposés distincts fournissent chacun une intégrale intermédiaire de cette sorte,

$$u(x, y, z, p, q)=\varphi[v(x, y, z, p, q)], \qquad u_1(x, y, z, p, q)=\psi[v_1(x, y, z, p, q)],$$

on continue l'intégration de la façon suivante. On pose

$$v=\alpha, \qquad v_1=\beta, \qquad u=\varphi(\alpha), \qquad u_1=\psi(\beta);$$

au moyen de ces quatre équations, on peut exprimer les variables $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ en fonction de $\alpha$, $\beta$ et de l'une d'entre elles ou d'une autre variable auxiliaire. L'équation

$$dz-pdx-qdy=0$$

devient alors une équation à trois variables : on démontre qu'elle est complètement intégrable. En adjoignant son intégrale aux quatre équations précédentes, on aura un système de cinq équations pour déterminer $x$, $y$, $z$, $p$ et $q$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$.

Dans le cas présent, posons

$$p = \alpha, \qquad q = \beta;$$

on aura

$$x = \theta_1(\alpha) - \frac{\log\beta}{\alpha}, \qquad y = \theta_2(\beta) - \frac{\log\alpha}{\beta}.$$

L'équation $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ s'écrit alors

$$dz - \alpha\theta_1'(\alpha)\,d\alpha - \beta\theta_2'(\beta)\,d\beta + \frac{\log\beta}{\alpha}d\alpha + \frac{\log\alpha}{\beta}d\beta - \frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{d\beta}{\beta} = 0,$$

et il est clair que cette équation est complètement intégrable. Pour avoir des formules débarrassées de signes de quadrature, posons

$$\theta_1(\alpha) = \varphi'(\alpha), \qquad \theta_2(\beta) = \psi'(\beta);$$

on aura finalement, pour l'intégrale générale,

$$x = \varphi'(\alpha) - \frac{1}{\alpha}\log\beta, \qquad y = \psi'(\beta) - \frac{1}{\beta}\log\alpha,$$
$$z = \alpha\varphi'(\alpha) - \varphi(\alpha) + \beta\psi'(\beta) - \psi(\beta) + \log\alpha\log\beta - \log\alpha\beta.$$

---

# EXERCICES SUR LE LIVRE V

**1.** Étant donnée une équation aux différentielles totales complètement intégrable

$$(1) \qquad P dx + Q dy + R dz = 0,$$

où P, Q, R sont des fonctions homogènes de $x$, $y$, $z$, du même degré d'homogénéité, démontrer que l'expression

$$\mu = \frac{1}{Px + Qy + Rz}$$

est un facteur intégrant pour l'équation (1) à moins que $Px + Qy + Rz$ ne soit nul. Dans ce dernier cas les surfaces intégrales de l'équation (1) sont des cônes qui s'obtiennent par l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre.

*Application.* — Montrer que les courbes gauches définies par les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = a, \qquad xyz^\alpha = b,$$

où $\alpha$ est une constante donnée, $a$ et $b$ des paramètres variables, sont les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces, et trouver ces surfaces.

(*Paris, épr. écr.*, 1[re] *quest.*)

**2.** Soient O$x$, O$y$, O$z$ trois axes de coordonnées rectangulaires, M un point d'une surface S, T le point où le plan tangent en M rencontre l'axe O$z$.

1° Trouver l'équation des surfaces S telles que OM = OT.

2° Déterminer les surfaces S qui passent par l'hyperbole $x = 1$, $2yz = 1$.

3° Démontrer qu'il existe une infinité de surfaces S tangentes à un plan quelconque P, et qu'il en existe une qui est tangente au plan P en tous les points d'une courbe.

On remarquera, pour l'intégration, que l'équation aux dérivées partielles se décompose en deux équations linéaires en $p$ et $q$.

(*Paris, épr. écr.*, 1[re] *quest.*)

**3.** Étant donnés trois axes rectangulaires O$x$, O$y$, O$z$, trouver les surfaces S telles que la distance d'un point M au plan des $xy$ soit égale à la distance du point O au plan tangent en M. Montrer que les courbes caractéristiques situées sur une surface S sont les lignes conjuguées des sections planes de cette surface par des plans parallèles au plan des $xy$. Trouver les surfaces S passant par la circonférence $z = h$, $x^2 + y^2 = R^2$.

(*Paris, épr. écr.*, 1[re] *quest.*)

**4.** Soient O$x$, O$y$, O$z$ trois axes de coordonnées rectangulaires, M un point d'une surface S, N le point d'intersection de la normale en M avec le plan $x$O$y$. On demande de déterminer les surfaces S telles que la longueur MN soit égale à la distance du point N à l'axe O$y$.

Trouver les surfaces de cette espèce qui passent par le cercle représenté par les deux équations $z = 0$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Démontrer que les caractéristiques sont des lignes de courbure des surfaces S et que la seconde famille de lignes de courbure est formée de courbes planes dont le plan passe par l'axe O$y$.

N. B. — Pour intégrer l'équation aux dérivées partielles des surfaces S, on pourra commencer par démontrer que les caractéristiques sont des courbes planes dont les plans sont parallèles à l'axe $Oz$.

(*Paris, épr. écr., 1^re^ quest.*)

**5.** 1° Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$(qy - px)(x^2 - y^2) + 2z(x^2 + y^2) = 0.$$

2° Déterminer la fonction arbitraire d'intégration de manière que les caractéristiques forment une famille de lignes asymptotiques de la surface. Donner dans ce cas la seconde famille de lignes asymptotiques.

3° Les surfaces ainsi définies dépendent encore d'une constante arbitraire $k$. Déterminer les trajectoires orthogonales de cette famille de surfaces (on se bornera à la projection sur le plan des $xy$).

(*Alger, épr. écrite.*)

**6.** Soit S l'enveloppe des sphères $\Sigma$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = R^2,$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux paramètres variables, et R une fonction positive de $\alpha$ et $\beta$.

1° En un point M où la sphère $\Sigma$, correspondant aux valeurs $\alpha$, $\beta$ des paramètres, touche S, on mène la normale qui rencontre les plans de coordonnées $xOy$, $yOz$ et $zOx$ aux points A, B, C respectivement.

On demande d'exprimer $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ au moyen de $\alpha$, $\beta$, $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial R}{\partial \beta}$, ces segments étant comptés positivement dans le sens de A vers M.

2° Démontrer qu'on peut toujours déterminer par une quadrature toutes les surfaces S telles qu'il existe entre les segments $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ et R une relation donnée de forme arbitraire

$$F(\overline{AB}, \overline{AC}, R) = 0.$$

3° On demande à quelles conditions doivent satisfaire les deux fonctions $\varphi(R)$ et $\psi(R)$ pour qu'il existe une surface S telle que les segments $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ vérifient les deux relations

$$\overline{AB} = \varphi(R), \qquad \overline{AC} = \psi(R).$$

4° Déterminer les surfaces S pour lesquelles on a

$$\overline{AC} = R + a, \qquad \overline{AB} = m(R + a),$$

$a$ et $m$ étant des constantes données, et indiquer un mode de génération de ces surfaces.

(*Paris, épr. écr., 1^re^ quest.*)

**7.** La normale MP en un point M d'une surface rencontre le plan $xOy$ en P. 1° Déterminer les surfaces S telles que MP = OP. 2° Lignes de courbure de ces surfaces. 3° Montrer que, si l'on choisit une surface S particulière, le point P décrit une courbe du plan des $xy$; déterminer la surface de telle sorte que cette courbe ait pour équation $x = \log y$.

(*Alger, épr. écr., 2^e^ quest.*)

**8.** Intégrer l'équation

$$xp + 3yq = 4\frac{y^2}{x^2}.$$

Chercher les surfaces intégrales de cette équation sur lesquelles les caractéristiques sont des lignes asymptotiques.

Plus généralement on considère l'équation

$$xp + 3yq = f(x, y),$$

où $f(x, y)$ est une fonction donnée de $x$ et $y$. A quelle condition doit satisfaire $f$ pour que cette dernière équation admette une famille de surfaces intégrales dépendant d'un paramètre variable et telles que les caractéristiques soient des lignes asymptotiques pour ces surfaces. Montrer que, si la condition est remplie, la famille de surfaces s'obtiendra par les quadratures.

(*Bordeaux, épr. écr., 2^e^ quest.*)

**9.** 1° Déterminer les fonctions $u(x, y)$ telles que l'expression $\frac{1}{y\sqrt{1+u^2}}(dx + u\,dy)$ soit une différentielle exacte.

2° La fonction $u$ est définie par une relation implicite $F(x, y, u) = 0$ dépendant d'une fonction arbitraire $\varphi$. Montrer que, quelle que soit cette fonction $\varphi$, les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad \frac{dy}{dx} = u(x, y)$$

sont des circonférences (C) ayant leurs centres sur l'axe $Ox$. En déduire l'intégrale générale de l'équation (E) et montrer que les trajectoires orthogonales s'obtiennent par une quadrature. (On suppose les axes de coordonnées rectangulaires.)

3° Achever les calculs en choisissant d'abord la fonction arbitraire de façon que l'on ait $u = 0$ le long de la parabole $y^2 = 2x$.

(*Paris, épr. écr.*, 1re *quest.*)

**10.** Soient $Ox$, $Oy$, $Oz$ trois axes de coordonnées rectangulaires, et D une droite du plan des $xy$ parallèle à $Ox$, représentée par les équations $z = 0$, $y = h$.

D'un point quelconque M de l'espace on abaisse la perpendiculaire MP sur D et la perpendiculaire MQ sur $Oz$. On demande l'équation générale des surfaces S telles que le plan tangent en un point quelconque M de l'une d'elles soit parallèle à la droite PQ correspondante.

Démontrer qu'il existe une infinité de surfaces de cette espèce, dépendant de deux constantes arbitraires, qui sont des surfaces développables.

Trouver la relation qui lie les coefficients angulaires du plan tangent à l'une de ces développables. Peut-on choisir les constantes dont dépendent ces surfaces développables de façon que l'arête de rebroussement soit une hélice?

(*Paris, épr. écr.*, 1re *quest.*)

**11.** On considère la famille de surfaces S représentées, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$x(x^2 + y^2 + z^2) + Cy^2 = 0,$$

où C désigne une constante arbitraire.

On demande l'équation des surfaces qui coupent orthogonalement en chacun de leurs points la surface S qui passe par ce point. Démontrer qu'il existe une famille de sphères $S_1$, dépendant d'un paramètre, qui satisfait à cette condition. Il existe une autre famille de surfaces $S_2$ formant avec les surfaces S et $S_1$ un système triplement orthogonal : trouver cette famille de surfaces $S_2$.

(*Paris, épr. écr.*, 1re *quest.*)

**12.** On considère les cônes donnés en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(x_0^2 + y_0^2\right)(z - 1)^2,$$

dans laquelle $x_0$ et $y_0$ sont deux paramètres :

1° On demande de former l'équation aux dérivées partielles du premier ordre E qui admet ces cônes pour surfaces intégrales.

2° Effectuer le changement de variables et de fonction défini par les relations

$$X = p, \qquad Y = q, \qquad Z = px + qy - z$$

et former ainsi l'équation aux dérivées partielles du premier ordre $E_1$ qui définit Z comme fonction de X et Y.

3° Expliquer pourquoi $E_1$ se décompose en deux équations linéaires, et intégrer ces deux équations.

(*Paris, épr. écr.*, 1re *quest.*)

**13.** 1° Étant donnée l'expression

$$\text{(1)} \qquad P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz,$$

où P, Q, R sont trois fonctions connues de $x$, $y$, $z$, démontrer qu'il existe une infinité de fonctions $f(x, y)$ des variables $x$ et $y$ telles que, si l'on remplace, dans l'expression (1), $z$ par $f(x, y)$ et $dz$ par $df$, on obtient une différentielle exacte. Expliquer comment on peut arriver à la condition à laquelle doit satisfaire la fonction $f$ en appliquant la formule de Stokes à une courbe fermée située sur la surface S représentée par l'équation $z = f(x, y)$.

2° Si $f(x, y) = C$ est une solution du problème quelle que soit la constante C, toutes les autres solutions s'obtiennent par une quadrature.

3° Lorsque l'équation

$$\text{(2)} \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

est complètement intégrable, toutes les surfaces S se déterminent sans aucune intégration quand on connaît l'intégrale générale $F(x, y, z) = C^{te}$ de l'équation (2).

4° Déterminer les surfaces S dans le cas particulier où l'on a

$$P = 2x(y^2 - z^2) - 6xyz, \qquad Q = 2yz^2 + 3z(y^2 - x^2), \qquad R = 0,$$

et prouver que ces surfaces S sont engendrées par des courbes Γ qui coupent orthogonalement une famille de surfaces Σ dont on demande l'équation (les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires). Indiquer une représentation paramétrique des courbes Γ.

(*Paris, épr. écr.*, 1re *quest.*)

**14.** Soit, en axes rectangulaires, $xy = az$ l'équation d'un paraboloïde hyperbolique. D'un point $M(x, y, z)$ on abaisse une droite D perpendiculaire sur le plan polaire du point M par rapport au paraboloïde. Quelle est l'équation aux dérivées partielles des surfaces S telles que si M est un point de l'une quelconque de ces surfaces S, le plan tangent Π en M à S contienne la droite D correspondant à M. Intégrer cette équation. Courbes caractéristiques. Déterminer la surface intégrale de façon qu'elle contienne la droite $x + y = 1$, $z = b(x - y)$ ($b$ const.). Lignes asymptotiques de la surface particulière ainsi obtenue.

(*Lyon, épr. écr.*)

**15.** Soient $p$ et $q$ les dérivées partielles premières d'une fonction $z$ des variables $x$ et $y$, P, Q celles de la fonction Z de X et Y qu'on déduit de la précédente en posant

$$x^2 = X, \qquad y^2 = Y, \qquad z^2 = Z.$$

Évaluer $p$, $q$ en fonction de P, Q, X, Y, Z. Appliquer cette transformation à l'équation aux dérivées partielles

$$(e) \qquad xyz(z - px - qy)^2 = pq.$$

Soit (E) l'équation transformée, qui appartient à un type classique. Intégrer cette équation, montrer qu'elle admet une intégrale singulière, indiquer comment sont constituées les multiplicités caractéristiques. En déduire les résultats correspondants dans l'étude de $(e)$.

Faire l'étude directe de l'équation $(e)$ en montrant d'abord qu'elle possède certaines surfaces intégrales du second ordre

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

où A, B, C sont des constantes choisies de manière à satisfaire à une relation de forme convenable $F(A, B, C) = 0$.

Écrire le système différentiel qui définit les multiplicités caractéristiques de $(e)$. Intégrer ce système.

(*Poitiers, épr. th.*)

**16.** I. — Soient dans un plan deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$. On donne une fonction $u(x, y)$, définie et continue ainsi que ses dérivées premières à l'intérieur d'une courbe fermée sans point double Γ.

Soit C une courbe fermée sans point double quelconque, intérieure à Γ; un sens positif et une origine des arcs ayant été choisis sur C, on désigne par $s$ l'abscisse curviligne d'un point $P(x, y)$ du contour C et par V l'angle de la demi-tangente positive en P et de la demi-droite PU dont l'angle avec $Ox$ est $u(x, y)$ :

1° Transformer l'intégrale curviligne $I = \int_C \cos V\, ds$ en une intégrale double étendue à l'intérieur du contour C (on précisera le sens de parcours adopté dans l'intégration le long du contour);

2° Comment faut-il choisir la fonction $u$ pour que I soit nulle quelle que soit C? Que peut-on dire alors des lignes qui en chacun de leurs points M sont tangentes à la direction MU correspondant à ce point;

3° $u$ étant définie par l'équation implicite

$$x \sin u - y \cos u = 1,$$

et C étant une courbe fermée sans point double quelconque, telle que les directions $PU_1$, $PU_2$ correspondant à l'un quelconque de ses points soient réelles et distinctes, on appelle PU l'une des directions $PU_1$, $PU_2$, et l'on suppose que les diverses positions de PU forment une suite continue lorsque P parcourt C. Calculer l'intégrale curviligne $\int_C \cos V\, ds$.

II. — Étant donnés un cylindre de révolution indéfini et un point A de sa surface S, on considère toutes les hélices tracées sur S et passant par A.

1° Démontrer que toutes les tangentes (D) de toutes ces hélices peuvent être considérées comme les normales d'une même surface $\Sigma$;

2° Déterminer les lignes de courbure de $\Sigma$ et les rayons de courbure principaux en un point M de $\Sigma$;

3° Soient C une courbe fermée sans point double, dont tous les points sont extérieurs au cylindre donné, V l'angle de la tangente à C en un de ses points avec une droite (D) passant par P; on suppose que lorsque P décrit une fois d'une manière continue le contour C à partir d'une position initiale $P_0$, (D) varie d'une manière continue (avec discontinuité éventuelle en $P_0$). Calculer $\int_C \cos V\, ds$.

N. B. — Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre. Cependant il est recommandé de ne traiter la troisième partie de II qu'après avoir traité I en entier.

(*Grenoble, épr. th.*)

**17.** Soient $Ox$, $Oy$, $Oz$ trois axes de coordonnées rectangulaires. Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces S telles que le point O soit équidistant d'un point quelconque M de l'une des surfaces S et du point d'intersection de la normale en M à la surface S avec le plan $xOy$. Trouver et définir géométriquement une intégrale complète. Intégrer le système différentiel des caractéristiques et les définir géométriquement. Une courbe caractéristique peut-elle être ligne asymptotique ou ligne de courbure d'une surface S?

(*Lille, épr. écr., 2e quest.*)

**18.** On considère un système d'axes rectangulaires.

1° Vérifier que les surfaces intégrales S de l'équation aux dérivées partielles (E) du premier ordre

$$(1 + p^2 + q^2)(by - ax) - (px + qy - z)[p(b - y) - q(a - x)] = 0$$

jouissent de la propriété suivante : sur une surface S, les courbes C le long desquelles le plan tangent à S demeure à une distance constante de l'origine sont aussi les courbes de contact des cônes circonscrits à S ayant leurs sommets sur la droite D

$$x = a, \qquad y = b.$$

2° Montrer, sans calculs, que l'équation (E) admet comme intégrale complète une famille de cônes ayant leurs sommets sur D et que les courbes C relatives à toutes les surfaces intégrales de (E) sont les courbes d'un complexe. Achever l'intégration de (E). Que peut-on dire encore des courbes C?

3° Transformer l'équation (E) par la transformation définie par les relations

$$x' = p, \qquad y' = q, \qquad z' = px + qy - z.$$

La nouvelle équation (E′) que l'on obtient ainsi est linéaire. Intégrer (E′) et montrer quelle

est la relation géométrique entre la congruence caractéristique de cette équation et l'intégrale complète de (E) précédemment trouvée.

(*Dijon, épr. th.*)

**19.** On donne un plan P et dans ce plan une droite $x'x$. Soient une surface S, un point quelconque M pris sur S, la normale en M, MI, limitée au point de rencontre I avec P, et la perpendiculaire IH sur $x'x$.

On demande de trouver les surfaces S telles que $MI = IH$.

On est conduit à une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Des considérations géométriques simples permettent d'avoir une intégrale complète. Pour l'obtenir par le calcul, il sera commode de prendre une nouvelle fonction $z'$ définie par $z' = x^2 + y^2 + z^2$.

Caractéristiques et développables caractéristiques.

Intégrale générale. Y a-t-il une intégrale singulière?

Surface intégrale passant par la parabole

$$y = k, \qquad z^2 - 2ux - v = 0$$

($k$, $u$ et $v$ sont des constantes).

Surface intégrale inscrite dans la surface

$$4y(x^2 + z^2) - 4z^2 - y = 0;$$

courbe de contact.

*Nota.* — On prendra des axes rectangulaires, l'axe des $y$ dans le plan P.

(*Nancy, épr. écr.*, 2e *quest.*)

**20.** On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\text{(E)} \qquad px + qy = f(v, z), \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ v = p^2 + q^2\right).$$

1° Montrer que sur chaque surface intégrale de (E) les courbes conjuguées des courbes caractéristiques sont situées dans des plans parallèles.

2° Déterminer la fonction $f(v, z)$ de manière que les courbes caractéristiques de (E) soient des lignes asymptotiques des surfaces intégrales. On trouvera pour (E) deux formes possibles : la première ($E_1$) renfermera $z$ sous une forme simple; pour la seconde ($E_2$) on trouvera

$$f(v, z) = V(v)\varphi(z),$$

où $V(v)$ est une fonction bien déterminée de $v$ et $\varphi(z)$ une fonction arbitraire de $z$.

3° Indiquer une intégrale complète de ($E_1$); faire connaître une propriété géométrique des cônes circonscrits aux surfaces intégrales de ($E_1$) et ayant leurs sommets sur O$z$.

4° Choisir $\varphi(z)$ de manière que l'équation ($E_2$) correspondante possède une infinité de surfaces intégrales S dépendant d'un paramètre arbitraire et qui soient toutes des hélicoïdes d'axe O$z$ et de même pas.

5° Calculer la courbure totale de S en un point M situé à une distance $r$ de O$z$.

(*Poitiers, épr. th.*, 1re *quest.*)

**21.** O$x$, O$y$, O$z$ étant trois axes rectangulaires, à un point M de coordonnées ($x$, $y$, $z$) on fait correspondre le plan P représenté par l'équation

$$y(X - x) + x(Y - y) + k(x, y)(Z - z) = 0,$$

$k$ ne dépendant que de $x$ et $y$. Soit $\Gamma$ une courbe gauche telle que le plan osculateur en l'un quelconque de ses points coïncide avec le plan P associé à ce point, et soit $\gamma$ la projection de $\Gamma$ sur le plan $x$O$y$.

1° La fonction $k(x, y)$ étant supposée *donnée*, former l'équation différentielle à laquelle satisfont les courbes $\gamma$. (On vérifiera que par un point quelconque du plan $x$O$y$ passent *deux* courbes $\gamma$, soient $\gamma_1$ et $\gamma_2$).

2° *Déterminer* la fonction $k(x, y)$ de manière qu'il existe des surfaces S dont toutes les lignes asymptotiques soient des courbes $\Gamma$. Cela fait :

*a.* Trouver les surfaces S pour lesquelles les courbes $\gamma_1$ et $\gamma_2$ soient constamment confondues.

*b*. Trouver les surfaces S développables.

(Traiter *a* et *b* indépendamment l'un de l'autre.)

3° *Déterminer* $k(x, y)$ de manière que $\gamma_1$ et $\gamma_2$ soient constamment orthogonales; en particulier, de manière que les courbes $\gamma_1$ soient des cercles de centre O et les courbes $\gamma_2$ leurs diamètres.

(*Poitiers, épr. écr.*, 1re *quest.*)

**22.** Soient

$$X = aZ + \alpha, \qquad Y = bZ + \beta$$

les équations d'une droite en coordonnées cartésiennes rectangulaires.

1° Montrer qu'il existe pour tous les complexes

$$\beta = \alpha f(a, b) + g(a, b),$$

quelles que soient les fonctions arbitraires $f$ et $g$, des surfaces développables dont les normales appartiennent au complexe.

2° Comment pourrait-on déterminer ces surfaces développables?

3° Trouver les surfaces développables dont les normales appartiennent au complexe

$$\frac{a\beta - b\alpha + 1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = \text{const.}$$

4° Trouver toutes les surfaces S dont les normales appartiennent au complexe précédent.

[On transformera, à défaut d'autre méthode, l'équation aux dérivées partielles des surfaces S en introduisant, au lieu des coordonnées cartésiennes $(x, y)$, les coordonnées polaires $(\rho, \omega)$].

5° Montrer que ces surfaces S sont égales aux surfaces qui leur sont parallèles. Que peut-on en conclure relativement à leurs lignes de courbure?

(*Toulouse, épr. th.*)

# EXERCICES COMPLEMENTAIRES [1]

**1.** On considère :

1° une fonction $f(z)$ *méromorphe* à l'intérieur d'un contour simple C et ne s'annulant pas sur C;

2° une fonction $\varphi(z)$ *holomorphe* à l'intérieur de C et sur le contour lui-même.

Démontrer que les pôles de la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z)$ à l'intérieur de C sont les zéros et les pôles de $f(z)$. En déduire la formule suivante, due à Cauchy,

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z)\,dz = \Sigma m\varphi(\alpha_i) - \Sigma n\varphi(\beta_k),$$

où $\alpha_i$ est un zéro d'ordre $m$ et $\beta_k$ un pôle d'ordre $n$, la sommation étant étendue à tous les zéros et à tous les pôles de $f(z)$ intérieurs au contour C.

**2.** Démontrer que les zéros d'une fonction holomorphe sont *isolés*, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $r > 0$ tel que le cercle de rayon $r$ ayant pour centre l'un quelconque des zéros de la fonction laisse tous les autres à l'extérieur.

En déduire qu'une fonction méromorphe dans une région *finie* du plan n'y possède qu'un nombre fini de zéros et de pôles.

**3.** Démontrer que si $f(z)$ est une fonction entière qui ne s'annule pour aucune valeur de $z$, on a

$$f(z) = e^{G(z)},$$

$G(z)$ désignant une autre fonction entière.

**4.** Démontrer qu'une fonction $f(z)$, méromorphe dans tout le plan, et pour laquelle le point à l'infini est un pôle ou un point ordinaire, se réduit à une fraction rationnelle. (On établira d'abord que les pôles de $f(z)$ sont en nombre limité.)

**5.** Considérons une suite illimitée

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

telle que la série $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ soit absolument convergente, et une seconde suite

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots$$

dont tous les termes sont inférieurs en module à un nombre fini. Démontrer que la série de terme général $\frac{A_i}{z - a_i}$ est absolument et uniformément convergente dans tout domaine ne contenant aucun des points $a_i$, ces points étant supposés isolés.

---

[1] Ces exercices sont spécialement destinés aux candidats à l'Agrégation. On y trouvera en particulier les éléments de la théorie des fonctions elliptiques.

Plus généralement, associons à chaque point $a_n$ un développement de la forme

$$R_n(z) = \frac{A_n^1}{z - a_n} + \frac{A_n^2}{(z - a_n)^2} + \dots + \frac{A_n^m}{(z - a_n)^m}$$

tel que :

1° les modules $|A_i^k|$ forment un ensemble borné;

2° le nombre des fractions élémentaires qui figurent dans chacun des développements $R_n(z)$ soit inférieur à un entier déterminé.

Démontrer qu'à tout développement $R_n(z)$, pour lequel $a_n \neq 0$, on peut faire correspondre un polynome $P_\nu(z)$ de degré $\nu - 1$ tel que la série $[R_n(z) - P_\nu(z)]$ soit absolument et uniformément convergente dans tout domaine ne contenant aucun des points $a_i$.

En déduire qu'il existe une fonction $f(z)$, méromorphe dans tout le plan, admettant pour pôles les points $a_i$ avec les parties principales $R_i(z)$ (*théorème de* Mittag-Leffler). Former l'expression la plus générale de la fonction $f(z)$.

**6.** Soit $f(z)$ une fonction *entière* dont les zéros

$$a_1, a_2, \quad a_n, \dots,$$

d'ordres

$$\alpha_1, \alpha_2, \quad \alpha_n, \dots,$$

respectivement, forment une suite illimitée. Démontrer qu'à tout nombre $a_n$ on peut faire correspondre un entier positif $\nu$ tel que la série

$$\sum_n \alpha_n \left( \frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \dots + \frac{z^{\nu-1}}{a_n^\nu} \right),$$

soit absolument et uniformément convergente dans tout domaine ne contenant aucun point $a_n$. En déduire (*théorème de* Weierstrass) qu'on peut exprimer $f(z)$ au moyen d'un produit infini de la forme

$$f(z) = z^m e^{G(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{\alpha_n} e^{\alpha_n \left(\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \dots + \frac{z^\nu}{\nu a_n^\nu}\right)},$$

$G(z)$ désignant une fonction entière.

[On posera $f(z) = z^m \varphi(z)$, $\varphi(z)$ désignant une fonction entière non nulle à l'origine, puis, après avoir appliqué le théorème de Mittag-Leffler à la fonction méromorphe $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$, on calculera l'intégrale $\int_0^z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz$].

**7.** Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ trois coefficients réels tels que

$$\alpha > 0, \qquad \beta^2 - \alpha\gamma < 0.$$

On considère la série double $S_1$ de terme général

$$\frac{1}{(\alpha m_1^2 + 2\beta m_1 m_2 + \gamma m_2^2)^p},$$

où l'on donne à $m_1$ et $m_2$ toutes les valeurs entières, positives ou négatives, à l'exclusion de la seule combinaison $m_1 = 0$, $m_2 = 0$, $p$ désignant un nombre positif. Montrer que le rapport $\frac{m_1^2 + m_2^2}{\alpha m_1^2 + 2\beta m_1 m_2 + \gamma m_2^2}$ reste borné : on peut donc, au point de vue de la convergence, remplacer l'étude de la série $S_1$ par celle de la série $\left[\frac{1}{(m_1^2 + m_2^2)^p}\right]$. En déduire que la série $S_1$ est convergente pour $p > 1$, divergente pour $p \leqslant 1$.

Soient alors $\omega_1$ et $\omega_2$ deux constantes telles que $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ ne soit pas un nombre réel. On pose

$$w = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

Démontrer que la série double $\sum' \frac{1}{w^\lambda}$ est convergente pour $\lambda > 2$ (l'accent indiquant que l'on exclut de la sommation la seule combinaison $m_1 = 0$, $m_2 = 0$). En déduire la convergence des séries

$$\sum' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right], \qquad \sum' \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right)$$

et du produit infini

$$\Pi'\left(1 - \frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}},$$

$u$ désignant une variable complexe. Montrer que séries et produit infinis sont *uniformément* convergents dans tout domaine de variation de $u$ ne contenant aucun des points $w$.

**8.** Soient $Ox$ un axe orienté quelconque, $a$ et $b$ deux longueurs données. On considère tous les points d'abscisses $m_1 a + m_2 b$, $m_1$ et $m_2$ désignant deux entiers positifs au plus égaux à $n$. Démontrer qu'on peut prendre $n$ assez grand pour que, $\varepsilon$ étant une longueur arbitrairement petite, deux au moins des points obtenus soient distants d'une longueur inférieure à $\varepsilon$.

En déduire que toute fonction analytique uniforme qui admet deux périodes *distinctes*, $2\omega_1$ et $2\omega_2$, dont le rapport est un nombre réel, se réduit nécessairement à une constante. (On dit que $n$ périodes données $2\omega_1$, $2\omega_2$, ..., $2\omega_n$ sont distinctes s'il est impossible de résoudre en nombres entiers non tous nuls l'équation

$$x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \ldots + x_n\omega_n = 0.)$$

Démontrer de même que toute fonction analytique uniforme qui admet plus de deux périodes distinctes se réduit nécessairement à une constante.

**9.** On nomme *fonction elliptique* toute fonction méromorphe doublement périodique.

Soient $2\omega_1$ et $2\omega_2$ les périodes d'une fonction elliptique $f(u)$, A et B les affixes de $2\omega_1$ et $2\omega_2$, enfin OABC le parallélogramme construit sur OA et OB. Nous supposerons constamment dans la suite que le contour OABC est décrit dans le sens direct, ce qui ne restreint pas la généralité : OABC est appelé *parallélogramme des périodes*. Lorsque $u$ décrit le domaine limité par ce parallélogramme, $f(u)$ prend toutes les valeurs qu'elle peut acquérir.

Démontrer :

1° que la somme des résidus relatifs aux pôles de $f(u)$ compris dans un parallélogramme des périodes est nulle;

2° que dans tout parallélogramme des périodes le nombre des zéros est égal au nombre des pôles, chacun étant compté avec son degré de multiplicité; ce nombre est l'*ordre* de $f(u)$;

3° que dans tout parallélogramme des périodes, la somme des zéros est égale à celle des pôles à une période près (pour les 2° et 3°, appliquer la formule de Cauchy, exercice 1);

4° qu'une fonction elliptique entière se réduit à une constante : en déduire qu'une fonction elliptique est déterminée, à un facteur constant près, par ses périodes, ses pôles et ses zéros (donnés avec leur degré de multiplicité), ou encore, à une constante additive près, par ses périodes et ses pôles donnés avec leur partie principale.

**10.** On pose

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \Sigma' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right]$$

(exercice 7), où la sommation est étendue aux valeurs de $w$ telles que

$$w = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$

$\omega_1$ et $\omega_2$ désignant deux constantes dont le rapport n'est pas un nombre réel. Démontrer :

1° que $\wp u$ est une fonction elliptique d'ordre 2, admettant les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$, et ayant comme pôles doubles tous les points $w$;

2° que l'on a, au voisinage de l'origine, un développement de la forme

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \ldots,$$

où $c_1 = 3\Sigma' \frac{1}{w^4}$, $c_2 = 5\Sigma' \frac{1}{w^6}$, le développement ne contenant que des puissances paires de $u$;

3° que si l'on pose

$$g_2 = 20 c_1, \qquad g_3 = 28 c_2,$$

on a identiquement

$$\wp'^2 u = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3,$$

et que tous les coefficients du développement de $\wp u$ sont des polynomes en $g_2$ et $g_3$;

4° que si l'on pose

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0,$$

$$\wp\omega_1 = e_1, \qquad \wp\omega_2 = e_2, \qquad \wp\omega_3 = e_3,$$

les nombres $e_1$, $e_2$, $e_3$ sont les racines de l'équation

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0.$$

**11.** Conservant les mêmes notations, on pose

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \Sigma'\left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right), \qquad \text{d'où} \qquad \zeta' u = -\wp u.$$

Démontrer :

1° que les différences

$$\zeta(u + 2\omega_1) - \zeta u, \qquad \zeta(u + 2\omega_2) - \zeta u$$

sont constantes;

2° que si l'on pose

$$\zeta\omega_1 = \eta_1, \qquad \zeta\omega_2 = \eta_2, \qquad \zeta\omega_3 = \eta_3;$$

on a les relations

$$\omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2 = \frac{\pi i}{2}, \qquad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0.$$

**12.** On pose

$$\sigma u = u \Pi'\left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}}, \qquad (w = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2).$$

Démontrer que le produit infini est uniformément convergent dans tout le plan : $\sigma u$ est donc une fonction entière. Vérifier les relations

$$\frac{d}{du}\log \sigma u = \zeta u, \qquad \sigma(u + 2\omega_1) = e^{-2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma u, \qquad \sigma(u + 2\omega_2) = e^{-2\eta_2(u+\omega_2)}\sigma u,$$

où $\eta_1$ et $\eta_2$ sont les constantes précédemment définies.

**13.** On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3.$$

Soient $e_1$, $e_2$, $e_3$ les racines, supposées distinctes, de l'équation

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0,$$

les points $e_1$, $e_2$, $e_3$ étant numérotés dans l'ordre des arguments croissants (compris entre 0 et $2\pi$).

Démontrer que l'équation (E) admet comme intégrale particulière une fonction elliptique $\wp u$ ayant pour périodes

$$2\omega_1 = 2\int_{e_1}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}, \qquad 2\omega_2 = 2\int_{e_2}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}.$$

**14.** On considère une fonction elliptique $f(u)$, de périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$. Soient $a, b, \ldots, l$ les pôles, $a_1, b_1, \ldots, l_1$ les zéros situés dans un parallélogramme des périodes : on a (exercice 9, 3°)

$$a + b + \ldots + l = a_1 + b_1 + \ldots + l_1 + w,$$

où $w$ est une période. Démontrer la *formule de* JACOBI

$$f(u) = C\frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-b_1)\ldots\sigma(u-l_1-w)}{\sigma(u-a)\ldots\sigma(u-l)},$$

où C est une constante convenablement choisie.

Soient d'autre part

$$\frac{A_1}{u-a} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(u-a)^\alpha},$$
$$\frac{B_1}{u-b} + \ldots + \frac{B_\beta}{(u-b)^\beta},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les parties principales de $f(u)$ au voisinage des pôles $a, b, \ldots l$. Démontrer la *formule d'*HERMITE

$$f(u) = C + A_1\zeta(u-a) - A_2\zeta'(u-a) + \ldots + \frac{(-1)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}A_\alpha\zeta^{(\alpha-1)}(u-a)$$
$$+ B_1\zeta(u-b) - \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cette formule, analogue à celle qui donne la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples, permet de calculer l'intégrale $\int f(u)\,du$.

Soit enfin, toujours avec les mêmes notations, $\theta$ une constante telle que

$$\theta + a + b + \ldots + l = 0.$$

On tire de la formule de JACOBI

$$f(u) = C\frac{\sigma(u-a_1)\ldots\sigma(u-l_1-w)\sigma(u-\theta)}{\sigma^{(n+1)}u} : \frac{\sigma(u-a)\ldots\sigma(u-l)\sigma(u-\theta)}{\sigma^{(n+1)}u};$$

en appliquant à chacune des deux fractions ci-dessus la formule d'HERMITE, montrer qu'on peut écrire

$$f(u) = C\frac{\beta + \beta_1\wp u + \beta_2\wp' u + \ldots + \beta_n\wp^{(n-1)}u}{\alpha + \alpha_1\wp u + \alpha_2\wp' u + \ldots + \alpha_n\wp^{(n-1)}u}.$$

En déduire que toute fonction elliptique peut se mettre sous la forme

$$f(u) = R(\wp u) + \wp' u R_1(\wp u),$$

R et $R_1$ étant des fractions rationnelles.

**15.** *Formules d'addition.* — Établir successivement les formules

$$\wp u - \wp v = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\sigma^2 v},$$

$$\zeta(u+v) = \zeta u + \zeta v + \frac{1}{2}\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v},$$

$$\wp(u+v) + \wp u + \wp v = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2.$$

**16.** Considérons une cubique plane sans point double, admettant l'origine pour point d'inflexion et tangente en ce point à l'axe des $x$. Montrer qu'on peut déterminer quatre constantes $\lambda$, $\mu$, $m$ et $n$ et une fonction elliptique $\wp u$ telles que les coordonnées $x$ et $y$ d'un point de la cubique s'expriment au moyen du paramètre $u$ par les formules

$$x = \frac{m\wp u + n}{\wp' u + \lambda\wp u + \mu}, \quad y = \frac{1}{\wp' u + \lambda\wp u + \mu},$$

Plus généralement, les équations

$$x = \frac{a_1 .\wp u + b_1 .\wp' u + c_1}{a \wp u + b \wp' u + c}, \qquad y = \frac{a_2 .\wp u + b_2 \wp' u + c_2}{a \wp u + b \wp' u + c},$$

où $\wp u$ est une fonction elliptique aux périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$, définissent une cubique plane.

1° Pour que trois points $u_1$, $u_2$ et $u_3$ de cette cubique soient alignés, il faut et il suffit que

$$u_1 + u_2 + u_3 = w,$$

$w$ désignant une période.

2° Pour que six points $u_1$, $u_2$, ... $u_6$ de la cubique appartiennent à une conique, il faut et il suffit que l'on ait

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_6 = w.$$

3° Trois tangentes à la cubique dont les points de contact sont alignés coupent la cubique en trois autres points alignés.

4° La cubique a neuf points d'inflexion déterminés par l'équation

$$u = \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{3};$$

ces points sont alignés trois à trois.

5° D'un point pris sur la cubique on peut lui mener quatre tangentes (autres que la tangente au point considéré). La droite qui passe par deux des points de contact et celle qui passe par les deux autres se coupent sur la cubique.

**17**. On désigne par sn $u$ l'intégrale de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = (1 - z^2)(1 - k^2z^2) \qquad (k^2 \neq 1)$$

qui prend la valeur *zéro* pour $u = 0$.

1° Démontrer que si $\wp u$ est la fonction elliptique pour laquelle les constantes $e_1$, $e_2$, $e_3$ précédemment définies ont les valeurs

$$e_1 = -\frac{1 + k^2}{3}, \qquad e_2 = -\frac{1 - 2k^2}{3}, \qquad e_3 = -\frac{k^2 - 2}{3},$$

on a

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{\wp u - e_1}}.$$

2° Exprimer sn $u$ au moyen des fonctions $\sigma$, et vérifier que c'est une fonction *uniforme*.

3° Former l'expression des périodes de sn $u$ en fonction du *module* $k$. Vérifier que si le module est réel, l'une des périodes est réelle et l'autre purement imaginaire.

4° Déterminer les zéros et les pôles de sn $u$ situés dans un parallélogramme des périodes.

5° Étudier de même les fonctions elliptiques cn $u$ et dn $u$ définies par les relations

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}, \qquad (\operatorname{cn} 0 = +1),$$
$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}, \qquad (\operatorname{dn} 0 = +1).$$

6° Établir les formules

$$\frac{d}{du}(\operatorname{sn} u) = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \qquad \frac{d}{du}(\operatorname{cn} u) = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,$$
$$\frac{d}{du}(\operatorname{dn} u) = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

**18**. On considère [1] les intégrales

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{ndx}{1 + n^2x^2}, \qquad \int_0^\infty ne^{-nx}dx$$

qui ont une valeur indépendante de l'entier positif $n$. Faire un graphique montrant pour chacune de ces intégrales la disposition des aires (égales) qu'elles mesurent. Lorsque $n$ croît

---

(1) Les exercices 18 à 32 ont été rédigés par M. Bouligand.

indéfiniment, on peut dire schématiquement qu'un élément de ces intégrales (celui qui correspond à $x=0$) devient infini, tous les autres s'annulant.

Cela posé, soit $f(x)$ une fonction quelconque continue pour $x=0$. Déduire du théorème de la moyenne, les formules

$$\lim_{n=\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\frac{n\,dx}{1+n^2x^2}=f(0),$$

$$\lim_{n=\infty} n\int_0^\infty f(x)\,e^{-nx}dx=f(0).$$

Plus généralement, soit $k(x, n)$ une fonction positive telle que l'intégrale

$$\int_0^h k(x, n)\,dx$$

tende vers 1 quand $n$ croît indéfiniment, dans les mêmes conditions [c'est-à-dire $k(x, n)$ tend vers 0 pour $x$ non nul, $k(0, n)$ croît indéfiniment]. Prouver que si $f(x)$ est continue pour $x=0$, on a

$$\lim_{n=\infty} \int_0^h f(x)\,k(x, n)\,dx=f(0).$$

**19.** On considère une fonction $f(x)$ bornée dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ et ne présentant dans cet intervalle qu'un nombre fini de points de discontinuité de première espèce. On détermine les coefficients de la série de Fourier attachés à cette fonction, soient

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt, \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt, \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

et on pose

$$S_n(x_0)=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos x_0+b_1\sin x_0+\ldots+a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0.$$

Transformer $S_n$ en remplaçant $a_0, a_1, \ldots b_n$ par leurs valeurs. Établir les formules

$$\sin t+\sin 3t+\ldots+\sin(2n-1)t=\frac{\sin^2 nt}{\sin t},$$

$$\frac{S_0+S_1+\ldots+S_{n-1}}{n}=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x_0+2t)+f(x_0-2t)}{2}\,\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt.$$

Montrer que, si $n$ croît indéfiniment, le second membre tend vers

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

(cf. exercice n° 18). Notamment, si $f(x)$ est continue et telle que $f(0)=f(2\pi)$, on a, pour $0\leqslant x\leqslant 2\pi$,

$$f(x)=\lim_{n=\infty}\frac{S_0+S_1+\ldots+S_{n-1}}{n}.$$

Dès lors, si la série de Fourier converge, sa somme (qui coïncide nécessairement avec la limite ci-dessus) est égale à la fonction $f(x)$. Sinon, il existe un procédé permanent de sommation consistant à former la moyenne précédente, laquelle tend bien vers $f(x)$.

(Féjer.)

**20.** Soit la fonction $f(\theta)$ continue et uniforme sur le cercle trigonométrique, $\theta$ servant à désigner l'abscisse angulaire d'un point de ce cercle. Montrer que la fonction

$$V(r, \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\varphi$$

est développable suivant les puissances croissantes de $r$ pour $r<1$, et que l'on a

$$V(r, \theta)=\frac{a_0}{2}+r(a_1\cos\theta+b_1\sin\theta)+\ldots+r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)+\ldots,$$

où les $a_n$, $b_n$ sont les coefficients de FOURIER attachés (comme précédemment) à $f(\theta)$. En déduire la relation

$$(1) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [V(r,\ \theta)]^2 d\theta = \frac{a_0^2}{2} + r^2(a_1^2 + b_1^2) + \ldots + r^{2n}(a_n^2 + b_n^2) + \ldots$$

On suppose qu'on fasse tendre $r$ vers 1 (par valeurs inférieures). En remarquant que pour $f = 1$, on a aussi $V \equiv 1$, et notant qu'on peut appliquer les résultats acquis relativement aux intégrales singulières (exercice n° 19), prouver que l'on a

$$\lim_{r=1} V(r,\ \theta) = f(\theta),$$

la limite étant atteinte uniformément dans l'ensemble de toutes les valeurs de $\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ (1).

En formant d'autre part

$$\int_0^{2\pi} \left[f(\theta) - \frac{a_0}{2} - a_1 \cos\theta - b_1 \sin\theta - \ldots - a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta\right]^2 d\theta,$$

prouver que la série entière en $r$ au second membre de (1) converge encore pour $r = 1$. En remarquant que les deux membres de (1) sont des fonctions croissantes de $r$, reconnaître la convergence uniforme pour $0 \leqslant r \leqslant 1$ et justifier par elle l'égalité limite résultant de (1).

N. B. — L'élève ayant fait les problèmes 19 et 20 sera en possession d'une véritable théorie du développement des fonctions continues en série trigonométrique. Il sait (d'après 19) que la série attachée à une fonction *continue* $f(\theta)$ est toujours, sinon convergente, du moins *sommable* par un processus de moyenne. D'autre part, il sait, d'après 20, que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \left[f(\theta) - \frac{a_0}{2} - a_1 \cos\theta - b_1 \sin\theta - \ldots - a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta\right]^2 d\theta$$

tend vers zéro. De ce fait, on ne pourrait conclure que la quantité sous le signe somme tend vers zéro (car sa limite n'est pas en général une fonction continue de $\theta$) : ce qu'on peut dire, c'est qu'elle tend vers zéro *presque partout*, c'est-à-dire exception faite d'un ensemble de points, enfermable dans un système de segments de longueur totale arbitrairement petite. Donc, la série de FOURIER converge presque partout; là où elle converge elle représente $f(\theta)$, là où elle ne converge pas, rien n'est perdu, car elle est encore *sommable*.

**21.** Soient $X_1$, $X_2$, ... $X_n$ des fonctions, linéairement indépendantes, de $x$ seul, $Y_1$, $Y_2$, ... $Y_n$ des fonctions, linéairement indépendantes, de $y$ seul, et continues (ou au moins intégrables) dans l'intervalle $(a,\ b)$. On pose $K(x,\ y) = X_1Y_1 + X_2Y_2 + \ldots + X_nY_n$.

1° Démontrer que l'*équation intégrale de première espèce*

$$\int_a^b \varphi(y) K(x,\ y)\, dy = f(x),$$

où $f(x)$ est une fonction donnée, continue entre $a$ et $b$, n'a pas en général de solution [$\varphi(y)$ est la fonction inconnue]. Pour que la solution existe, il faut et il suffit que $f(x)$ soit une combinaison linéaire de $X_1$, ... $X_n$.

2° Montrer par contre que l'*équation intégrale de seconde espèce*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \varphi(y) K(x,\ y)\, dy = f(x)$$

admet en général une solution et une seule, rationnelle en $\lambda$. Les valeurs exceptionnelles de $\lambda$ sont les zéros du dénominateur. Faire la discussion dans le cas suivant (2) :

$$a = 0, \qquad b = 2\pi, \qquad K(x,\ y) = \cos(x - y).$$

---

(1) On pourra admettre ce point.

(2) Cf. le tome III du *Cours d'analyse* de M. GOURSAT, chapitre XXXI.

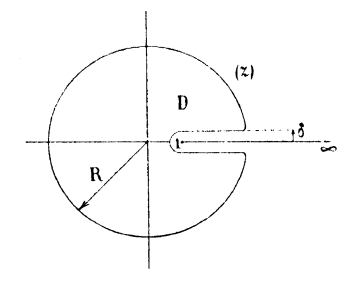
**22.** 1° On considère la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} z^n.$$

Démontrer que pour $t$ réel, positif et $< 1$, sa somme est une fonction entière de $z$, qui, en vertu de la définition de la fonction $\Gamma$, peut aussi s'écrire sous la forme

$$f_t(z) = \int_0^{\infty} e^{-x+zx^t}\, dx$$

(le chemin d'intégration étant constitué par la partie positive de l'axe réel). Démontrer que, lorsque $t$ tend vers 1 (valeurs approchées par défaut), $f_t(z)$ tend vers $\frac{1}{1-z}$ en tout point du plan de la variable $z$ n'appartenant pas à la portion de l'axe réel allant du point d'affixe $+1$ jusqu'à l'infini.




On prouvera que la convergence est uniforme dans tout domaine D dont les points sont à une distance de l'origine au plus égale à une longueur R et sont à une distance de la demi-droite $(1, \infty)$ au moins égale à une longueur $\delta$, c'est-à-dire qu'à tout nombre positif $\varepsilon$, on peut faire correspondre un nombre positif $\alpha$ tel que l'inégalité

$$1 - t < \alpha$$

entraîne dans toute l'étendue de D

$$\left| f_t(z) - \frac{1}{1-z} \right| < \varepsilon.$$

2° On considère la fonction $\varphi(z)$, holomorphe pour $z = 0$, et définie par le développement

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n.$$

Supposant pour simplifier que cette fonction n'a qu'un nombre fini de points singuliers à une distance finie, on mène les demi-droites issues des points singuliers et contenant l'origine sur leurs prolongements. Soit C un contour fermé sans point double, tout entier à distance finie et qui reste à une distance $\geqslant \delta$ de l'une des précédentes demi-droites. En utilisant la formule

$$\varphi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\varphi(u)}{u} \frac{du}{1 - \frac{z}{u}} = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\varphi(u)}{u} \left[ \lim_{t=1} f_t\left(\frac{z}{u}\right) \right] du,$$

prouver (¹) qu'en tout point du plan $(z)$ non situé sur une des demi-droites précédentes, l'on a

$$\lim_{t=1} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} \alpha_n z^n = \varphi(z).$$

**23.** 1° Démontrer la formule

$$\frac{1}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 \left( \mathrm{L}\frac{1}{x} \right)^{p-1} x^{n-1} dx, \qquad \left( \text{poser } \mathrm{L}\frac{1}{x} = u \right).$$

En déduire qu'à l'intérieur du cercle unité décrit de l'origine comme centre, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p} = \frac{z}{\Gamma(p)} \int_0^1 \left( \mathrm{L}\frac{1}{x} \right)^{p-1} \frac{dx}{1 - zx}.$$

---

(¹) Ce résultat constitue une des méthodes de prolongement analytique données par M. Édouard Le Roy dans son mémoire des *Annales de Toulouse* (1900).

Ce second membre représente une fonction analytique non uniforme de $z$ n'ayant que les points singuliers $z=1$ et $z=\infty$, et fournit le prolongement analytique de la série entière figurant au premier membre.

2° On désigne par $\alpha(n)$ une fonction analytique de $n$, développable en une série de la forme

$$\alpha(n)=\lambda_0+\frac{\lambda_1}{n}+\frac{\lambda_2}{n^2}+\frac{\lambda_3}{n^3}+\ldots,$$

convergente pour $n$ suffisamment grand : on peut donc trouver un nombre $\lambda$ tel que $|\lambda_p|<\lambda^p$, quel que soit $p$.

Démontrer que

$$\varphi(x)=\frac{\lambda_1}{\Gamma(1)}+\frac{\lambda_2}{\Gamma(2)}\mathrm{L}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{\lambda_3}{\Gamma(3)}\left[\mathrm{L}\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2+\ldots$$

est une fonction entière de $u=\mathrm{L}\frac{1}{x}$, et que pour $0<x<1$, on a

$$|\varphi(x)|<\frac{\lambda}{x^\lambda}.$$

En déduire qu'on a, à partir d'une certaine valeur $n_0$ de $n$,

$$\alpha(n)=\lambda_0+\int_0^1\varphi(x)x^{n-1}dx.$$

D'après cela, effectuer le prolongement analytique de la série entière

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}\alpha(n)z^n$$

et montrer que les seuls points singuliers sont 1 et $\infty$. Prouver que ce résultat subsiste si on change $\alpha(n)$ en $\alpha(n)+\mathrm{P}(n)$, en désignant par $\mathrm{P}(n)$ un polynome en $n$.

(E. Le Roy, ibid.)

**24.** Soit $\mathrm{V}(t)$ une fonction de la variable réelle $t$ telle que l'intégrale $\int_0^1|\mathrm{V}(t)|\,dt$ ait un sens.

On pose, avec M. Hadamard [1],

$$\varphi(z)=\int_0^1\mathrm{V}(t)f(tz)\,dt,$$

en appelant $f(z)$ une fonction analytique, holomorphe autour de l'origine et n'ayant (pour simplifier) qu'un nombre fini de points singuliers. Montrer que la fonction $f(tz)$, pour chaque valeur réelle de $t$ de l'intervalle $(0,1)$, est holomorphe dans la région obtenue en excluant seulement du plan $z$ les points des demi-droites issues des points singuliers de $f(z)$ et dont les prolongements passent par l'origine. En déduire que $\varphi(z)$ est holomorphe dans la même région. S'appuyant sur la possibilité de substituer à l'origine un point voisin, montrer que les seuls points singuliers possibles de $\varphi(z)$ sont ceux de $f(z)$.

Si donc le développement de $f(z)$ est

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots,$$

la série de Taylor

$$a_0b_0+a_1b_1z+\ldots+a_nb_nz^n+\ldots,$$

obtenue en posant

$$b_n=\int_0^1\mathrm{V}(t)\,t^n\,dt,$$

définit une fonction ayant les mêmes points singuliers que $f(z)$.

On pose

$$\mathrm{V}(t)=t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1},$$

(1) *La série de Taylor et son prolongement analytique* (Collect. *Scientia*). Voir aussi Goursat, *Cours d'analyse*, nouvelle édition du tome II, chapitre XVI.

$\beta$ et $\gamma-\beta$ étant $>0$ et

$$f(z)=(1-z)^{-\alpha}.$$

Montrer que, dans ce cas, l'intégrale $\varphi(z)$ est égale à la somme de la série hypergéométrique

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z)=1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}z+\ldots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}z^n+\ldots,$$

dont le prolongement analytique se trouve alors effectué.

**25.** *a*) Une courbe plane C est donnée par son équation intrinsèque

$$\frac{1}{R}=\rho(s), \tag{1}$$

où $\rho(s)$ désigne une fonction continue, positive et périodique de période L. On considère les arcs (0, L), (L, 2L), (2L, 3L), ... de cette courbe. Prouver que différentes circonstances sont possibles.

1° Ils coïncident et C sera appelée un *ovale*.

2° Ils se déduisent du premier d'entre eux par les multiples d'une certaine translation.

3° Ils se déduisent du premier d'entre eux par les multiples d'une rotation. Quelle est alors la condition pour que la courbe se ferme?

*b*) On suppose réalisées les trois conditions pour que C soit un ovale et on désigne par $\delta(s)$ la distance algébrique du point d'abscisse curviligne $s$ de C à une droite $\Delta$ de son plan. Prouver que l'on a

$$\int_C \delta(s)\rho'(s)\,ds=0. \tag{2}$$

Soient A et B les points de C où le rayon de courbure atteint sa valeur la plus grande et sa valeur la plus petite. La dérivée de la courbure s'annule en ces points. Montrer qu'elle ne peut garder un signe constant sur chacun des deux arcs AMB et BNA qui composent C [on utilisera la relation (2)]. De la parité du nombre (supposé fini) des points où une fonction continue change de signe sur une courbe fermée, conclure à l'existence sur C de quatre zéros au moins de $\rho'(s)$.

**26.** 1° Soit l'équation différentielle

$$y'=y\varphi_0(x)+y^3\varphi_1(x)+\ldots+y^{2n+1}\varphi_n(x),$$

où $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ sont des fonctions croissantes de $x$, s'annulant simultanément pour $x=0$. Disposition des courbes intégrales, concavité. En supposant qu'une au moins des $n$ dernières fonctions $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ ne soit pas $\equiv 0$, montrer que l'expression

$$\int_{y_0}^{my_0}\frac{dy}{y\varphi_0(x)+y^3\varphi_1(x)+\ldots+y^{2n+1}\varphi_n(x)}$$

prise le long d'une courbe intégrale rencontrant O$y$ au point $(0, y_0)$ tend vers une limite finie quand $m$ tend vers $+\infty$. En déduire que chaque courbe intégrale possède deux asymptotes parallèles à O$y$. Caractères généraux de la loi de variation de leurs abscisses en fonction de $y_0$.

2° Soit l'équation différentielle

$$y''=y\varphi_0(x)+y^3\varphi_1(x)+\ldots+y^{2n+1}\varphi_n(x),$$

où $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ sont positives quel que soit $x$. Indiquer les aspects d'une courbe intégrale suivant qu'elle coupe ou non l'axe O$x$. Prouver encore que chaque courbe intégrale présente deux asymptotes parallèles à O$y$.

**27.** 1° Soit l'équation linéaire

$$y'+Py=Q,$$

où P et Q sont deux fonctions continues quel que soit $x$. Lorsque $x$ tend vers $+\infty$, on sup-

pose que P tend vers une limite $a$ et Q vers une limite $b$. Montrer que si $a$ est $< 0$, il y a une intégrale et une seule qui tend vers $\frac{b}{a}$, laquelle peut s'écrire

$$y(x) = \frac{\int_x^\infty Q(x)\varpi(x)\,dx}{\int_x^\infty P(x)\varpi(x)\,dx},$$

en désignant par $\varpi(x)$ une solution de l'équation $\varpi' - P\varpi = 0$. Lorsque $a$ est $> 0$, montrer de même que toutes les intégrales tendent vers zéro.

2° Déduire de ce qui précède le résultat suivant. Soit $f(x)$ une fonction continue, ainsi que sa dérivée, pour $x > 0$. Si l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x} f'(x)\,dx$$

a un sens, il en est de même de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx.$$

(On montrera que la fonction $y = \int_0^x e^{-t} f'(t)\,dt$ satisfait à l'équation

$$y(x) + y'(x) = f(0) + \int_0^x e^{-t} f'(t)\,dt.\Big)$$

**28.** Soit l'équation différentielle

$$y'' = f(x)y, \tag{1}$$

$f(x)$ étant une fonction continue, constamment positive, et qui tend vers une limite $\omega^2$ non nulle lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

On considère le faisceau des courbes intégrales de (1) qui passent par un point A donné. Montrer qu'il se compose à la fois :

1° de courbes rencontrant $Ox$ en un point et un seul;

2° de courbes non sécantes à $Ox$.

En déduire qu'il existe une courbe intégrale et une seule de (1) séparatrice des deux systèmes précédents, passant par le point A, et asymptote à la demi-droite $Ox$. Soit $y = \eta(x)$ l'équation de cette courbe intégrale. Établir la relation

$$\eta'^2(x+h) - \eta'^2(x) = 2\int_x^{x+h} f(x)\eta(x)\eta'(x)\,dx.$$

A l'aide du théorème de la moyenne, montrer que, si $x$ et $x+h$ croissent indéfiniment, d'une manière indépendante, on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\eta'^2(x+h) - \eta'^2(x)}{\eta^2(x+h) - \eta^2(x)} = \omega^2.$$

Notant qu'on peut prendre $h$ assez grand vis-à-vis de $x$ pour rendre $\eta'^2(x+h)$ négligeable par rapport à $\eta'^2(x)$, en même temps que $\eta^2(x+h)$ négligeable par rapport à $\eta^2(x)$, conclure finalement

$$\lim_{x=\infty} \frac{\eta'(x)}{\eta(x)} = -\omega.$$

Montrer d'après cela qu'en appelant $\varepsilon$ un nombre positif arbitraire, on a

$$\lim_{x=\infty} e^{(\omega-\varepsilon)x}\eta(x) = 0,$$

$$\lim_{x=\infty} e^{(\omega+\varepsilon)x}\eta(x) = +\infty.$$

**29.** 1° Montrer que l'intégration de l'équation

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + f(x) = 0,$$

où $k$ est constant, équivaut à celle du système

$$\text{(2)} \qquad \frac{dx}{dt} = v, \qquad v\frac{dv}{dt} + kv + f(x) = 0.$$

2° On suppose $k > 0$ et $f(x) > 0$. On fait désigner à $x$ l'abscisse d'un mobile sur une droite $x'x$, son mouvement étant régi par l'équation (1). On donne l'abscisse $x_0$ au temps $t = 0$, supposée positive, et la vitesse initiale $v_0$.

Prouver que, si $v_0$ est $> 0$, le mobile après avoir progressé vers les $x$ positifs d'un mouvement ralenti, rebrousse chemin et atteint l'origine au bout d'un temps fini T, si l'on a $f(x) > m$, en appelant $m$ un nombre positif fixe. Qu'y a-t-il de modifié si $v_0$ est $< 0$? [1]

**30.** 1° Soit l'équation $y'' + Py' + Qy = 0$, où P et Q désignent des fonctions continues quel que soit $x$. Soit $u$ une solution s'annulant aux extrémités de l'intervalle $x_1x_2$ à l'exclusion de toute valeur comprise dans cet intervalle. Soit $v$ une autre solution non proportionnelle à $u$. Ayant calculé la dérivée de $\frac{v}{u}$, prouver que, dans chaque intervalle partiel de $x_1$, $x_2$ où il reste continu, ce rapport varie toujours dans le même sens. En déduire (à l'aide d'un graphique) que ce rapport s'annule une fois et une seule entre $x_1$ et $x_2$; conclure avec Sturm que les zéros des solutions indépendantes de (1) se séparent mutuellement.

2° Soient les deux équations

$$y'' + yA_1(x) = 0, \qquad y'' + yA_2(x) = 0,$$

$u_1$ une solution de la première, $u_2$ une solution de la seconde. Établir l'identité

$$\frac{d}{dx}\left(u_1'u_2 - u_1u_2'\right) + (A_1 - A_2)u_1u_2 = 0.$$

Prouver, d'après cela, que si l'on a constamment $A_1 - A_2 < 0$, deux zéros consécutifs $x_1$ et $x_2$ de $u_1$ enserrent au moins un zéro de $u_2$: on montrera que, si $u_2$ conservait un signe constant entre $x_1$ et $x_2$, les deux termes du premier membre de l'identité

$$\left[u_1'u_2 - u_1u_2'\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}(A_1 - A_2)\,u_1u_2\,dx = 0$$

seraient de même signe.

3° Soit l'équation

$$y'' + yA(x) = 0,$$

où $A(x)$ reste comprise entre deux constantes positives $m$ et M. Démontrer que les intégrales de cette équation sont oscillantes, les zéros et les points stationnaires se succédant alternativement à des intervalles moindres que $\frac{\pi}{2\sqrt{m}}$ et supérieurs à $\frac{\pi}{2\sqrt{M}}$ [2]. On construira à cette occasion les courbes intégrales des trois équations

$$y'' + my = 0, \qquad y'' + yA(x) = 0, \qquad y'' + My = 0,$$

qui sont tangentes en un même point à une parallèle à l'axe $Ox$ et on étudiera leur disposition relative. Interpréter au point de vue dynamique les résultats obtenus, en convenant que $x$ représente le temps, et $y$ l'élongation d'un mobile parcourant l'axe $y'y$, et soumis à une attraction, émanant du point O, et régie successivement par des lois

---

(1) Ces questions constituent la première partie du problème d'Analyse proposé à l'agrégation des sciences mathématiques en 1925. Ce problème a été élégamment résolu par M. Gambier, dans les numéros d'avril et juin 1926 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Nous renverrons le lecteur à ce recueil.

(2) La question 3° est extraite du problème d'analyse proposé à l'agrégation des sciences mathématiques en 1926. Voir au n° 32 l'énoncé complet de ce problème, dont la solution a été également développée par M. Gambier dans le même recueil (1927).

(susceptibles de varier avec le temps) conduisant à l'une des trois équations précédentes : on sera ramené à comparer dans chaque cas ce qui se passe lorsqu'on abandonne le mobile sans vitesse initiale, dans la même position de départ.

(On pourra approfondir ces questions dans le chapitre VI du tome III du *Traité d'Analyse* de M. Émile PICARD. Voir également dans la collection BOREL l'ouvrage de M. BÖCHER : *Leçons sur les méthodes de* STURM, chap. III, n° 13).

**31.** 1° Soit l'équation

(1) $$y'' + yA(x) = 0$$

dans laquelle A est périodique en $x$, de période $\pi$. Montrer que si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions indépendantes, il en est de même de $y_1(x+\pi)$ et $y_2(x+\pi)$ et l'on a des formules du type suivant :

$$y_1(x+\pi) = a_{11}\, y_1(x) + a_{12} y_2(x),$$
$$y_2(x+\pi) = a_{21}\, y_1(x) + a_{22} y_2(x).$$

Chercher la condition pour qu'une intégrale $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ se reproduise après changement de $x$ en $x+\pi$, multipliée par un facteur $s$. Montrer que $s$ devra satisfaire à l'équation [1]

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - s \end{vmatrix} = 0.$$

Montrer d'autre part que l'on a simultanément

$$\begin{vmatrix} y_1(x+\pi) & y_2(x+\pi) \\ y_1'(x+\pi) & y_2'(x+\pi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

et

$$y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = C.$$

En déduire que l'équation (2) est de la forme $s^2 - ks + 1 = 0$.

2° Lorsque les racines sont réelles et distinctes, prouver que (1) possède deux solutions de la forme $e^{mx}\varphi(x)$ et $e^{-mx}\psi(x)$, en appelant $\varphi$ et $\psi$ deux fonctions admettant la période $\pi$.

Lorsque $k = 2$, l'intégrale générale de (1) est de la forme $C_1\varphi(x) + C_2[x\varphi(x) + \psi(x)]$, $\varphi$ et $\psi$ admettant la période $\pi$. Lorsque $k = -2$, l'intégrale générale de (1) est de la même forme, $\varphi$ et $\psi$ admettant la période $2\pi$ [2].

Pour $|k| < 2$ (soit $k = 2\cos\alpha$), l'équation (1) admet les *deux* solutions *bornées* (particularité réservée à ce cas)

$$\cos\frac{\alpha x}{\pi}\varphi_1(x) - \sin\frac{\alpha x}{\pi}\varphi_2(x),$$
$$\sin\frac{\alpha x}{\pi}\varphi_1(x) + \cos\frac{\alpha x}{\pi}\varphi_2(x), \qquad (\alpha \text{ non multiple de } \pi),$$

$\varphi_1$ et $\varphi_2$ étant périodiques de période $\pi$. Comment faut-il prendre $\alpha$ pour que ces fonctions soient périodiques?

3° Soit l'équation particulière

$$y'' + (12 + \lambda\cos 2x)y = 0$$

dont la solution est connue pour la valeur $\lambda = 0$. Montrer que, pour cette valeur particulière, on a $|k| < 2$. On suppose que $\lambda$ varie d'une manière continue à partir de zéro, entre quelles limites peut-on faire varier $\lambda$ pour être assuré que $k$ restera compris entre $-2$ et $+2$? Montrer, d'après les résultats du 2°, qu'il en est bien ainsi tant qu'on ne rencontre

---

(1) C'est là un cas particulier d'une théorie générale, développée dans le *Cours d'Analyse* de M. GOURSAT (t. II, n° 416).

(2) On montrera d'abord que si l'équation (2) a une racine double $s$, la substitution linéaire de deux intégrales indépendantes provoquée par un changement de $x$ en $x+\pi$ peut, par un choix convenable de celles-ci, être écrite

$$y_1(x+\pi) = s y_1(x), \qquad y_2(x+\pi) = s\,[y_1(x) + y_2(x)].$$

pas de solution périodique $y_2(x)$ dont les zéros sont en progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{n}$. Sachant d'ailleurs (d'après l'exercice 30) que la distance $\delta$ de deux zéros consécutifs satisfait aux inégalités

$$\frac{\pi}{\sqrt{12+\lambda}} < \delta < \frac{\pi}{\sqrt{12-\lambda}},$$

en déduire qu'une condition suffisante est $\lambda < 3$.

**32.** On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

(1) $$x'' + xA(t) = 0,$$

où $A(t)$ désigne une fonction analytique de la variable indépendante $t$, réelle et régulière pour toutes les valeurs réelles et finies de $t$.

1° Démontrer que toute solution de cette équation peut se mettre sous la forme

$$x = \rho \cos\varphi,$$

$\rho$ satisfaisant à l'équation différentielle

(2) $$\rho'' - \frac{c^2}{\rho^3} + \rho A(t) = 0,$$

où $c$ désigne une constante à laquelle on peut donner une valeur arbitraire, autre que zéro (1 par exemple), tandis que $\varphi$ a pour valeur

$$\int \frac{c\,dt}{\rho^2}.$$

Réciproquement, si $\rho$ est une intégrale quelconque de (2) et $\varphi$ une fonction primitive de $\frac{c}{\rho^2}$, l'intégrale générale de (1) est de la forme

$$C\rho\cos(\varphi + h),$$

C et $h$ étant les constantes d'intégration. Toute solution $\rho(t)$ de l'équation (2) est régulière et de signe constant quand $t$ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

2° Il résulte de ce qui précède que l'équation (2) s'intègre par une quadrature dès que l'on en connaît une solution particulière. Sous quelle forme les constantes d'intégration $\rho_0$ et $\rho'_0$ figurent-elles dans l'expression de l'intégrale? Interpréter le résultat en considérant les trajectoires du point analytique

$$z = \rho e^{i\varphi},$$

et le lien qui existe entre les trajectoires correspondant aux diverses solutions de l'équation (2). Examiner le cas où A est une constante positive.

3° On suppose, dans cette troisième partie du problème, que $A(t)$ reste comprise entre deux constantes positives M et $m$. Démontrer que les intégrales réelles $x(t)$ de l'équation (1) sont *oscillantes*, les zéros et les points stationnaires se succédant alternativement à des intervalles moindres que $\frac{\pi}{2\sqrt{m}}$ et plus grands que $\frac{\pi}{2\sqrt{M}}$. Établir, dans les mêmes conditions, quelques propriétés des intégrales réelles $\rho(t)$ de l'équation (2). Montrer notamment que, si $\rho_1$ et $\rho_2$ sont deux valeurs stationnaires consécutives, on a

$$\frac{c}{\sqrt{M}} < \rho_1\rho_2 < \frac{c}{\sqrt{m}},$$

et que, dans le cas où les amplitudes d'oscillation $|\rho_2 - \rho_1|$ deviennent infiniment grandes, les intervalles $|t_2 - t_1|$ correspondants ne deviennent ni infiniment grands ni infiniment petits.

4° Examiner ensuite le cas où $A(t)$ est une fonction périodique, de période égale à $\pi$. Montrer que, parmi les intégrales de (1), il en existe alors en général deux, linéairement

distinctes, qui sont multipliées par les facteurs $\lambda$ et $\frac{1}{\lambda}$ quand on change $t$ en $t+\pi$, $\lambda$ étant racine de l'équation du second degré à coefficients réels

$$\lambda^2 - k\lambda + 1 = 0.$$

Quelles sont les propriétés des intégrales réelles de (1) et (2) qui correspondent aux diverses hypothèses

$$k > 2 \quad \text{ou} \quad k < -2, \quad \text{ou} \quad k^2 < 4, \quad \text{ou} \quad k = \pm 2\,?$$

Montrer que la condition $k^2 < 4$ est suffisante, et la condition $k^2 \leqslant 4$ nécessaire pour que (2) admette une solution périodique.

(On dit alors que les solutions de (1) sont stables.)

5° Démontrer que, $A(t)$ étant toujours supposée périodique, le nombre N des zéros d'une intégrale réelle de (1), contenus dans l'intervalle (0, T), est donné par la formule

$$N = \alpha T + r,$$

$\alpha$ étant fixe et $r$ restant borné.

6° On pose en particulier

$$A = q^2 + q_1 \cos 2t,$$

$q$ et $q_1$ étant des constantes réelles, qui vérifient l'inégalité

$$|q_1| < q^2.$$

Démontrer que si l'intervalle $(q^2 - q_1,\ q^2 + q_1)$ ne renferme le carré d'aucun nombre entier, l'équation (1) n'admet que des solutions stables.

(*Agrégation.*)

# TABLE DES MATIÈRES

## LIVRE III. — THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES



## LIVRE IV. — GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE

## LIVRE V. — ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

**RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS.** (*Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes*, par E. Carvallo, agrégé des sciences mathématiques, docteur ès sciences, directeur des études à l'école Polytechnique. — Broch. 28/22$^{cm}$, 4$^e$ édition . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 fr. 50

**RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU 3$^e$ DEGRÉ.** (Nouvelles méthodes), par de Galembert. — Broch. 22/14$^{cm}$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 fr. 50

**LES FONCTIONS CIRCULAIRES ET LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES,** *étudiées parallèlement en partant de la définition géométrique*, par H. Tripier, ingénieur des Arts et Manufactures. Broch. 22/14$^{cm}$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8 fr. »

**DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE ET DE LA FONCTION LOGARITHMIQUE. PROPRIÉTÉS,** par H. Tripier. — Broch. 22/14$^{cm}$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 fr. 50

**ÉLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL,** par W. A. Granville, président du collège de Pensylvanie, avec la collaboration de Percey F. Smith, professeur à l'école scientifique Sheffield de l'Université d'Yale. — Traduit par A.-A.-M. Sallin. Vol. 25/16$^{cm}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42 fr. »

Ces éléments peuvent être étudiés avec fruit par un élève travaillant seul. L'ouvrage est d'une lecture facile et l'exposé de chaque notion y est suivi d'applications immédiates dont un grand nombre sont entièrement traitées.

**PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE,** par E. Mosnat, professeur au lycée Rollin. — Trois vol. 22/14$^{cm}$.

Tome I, à l'usage des candidats aux Écoles Centrale, Navale, des Ponts et Chaussées, des Mines de Paris et de Saint-Étienne et des aspirantes à l'Agrégation des jeunes filles. — 5$^e$ édition augmentée . . . . . . . . . . . . . 30 fr. »

Tome II (*Géométrie à deux dimensions*), à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale et à l'Agrégation. — 3$^e$ édition . . . . . 30 fr. »

Tome III (*Géométrie à trois dimensions*), à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale et à l'Agrégation. — 3$^e$ édition augmentée. 30 fr. »

**QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE** (Leçons sur certaines) : *Possibilités des constructions géométriques. Les polygones réguliers. Transcendance des nombres e et $\pi$* (démonstrations élémentaires), par F. Klein, professeur à l'Université de Gœttingue, rédaction française, autorisée par l'auteur, de J. Griess, ancien élève de l'école normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques, professeur au lycée Charlemagne. — 2$^e$ édition. Vol. 22/14$^{cm}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10 fr. »

**UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE ET SES APPLICATIONS,** par G. Cuny, ancien élève de l'École Polytechnique. — Vol. 25/16$^{cm}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . 11 fr. »

Une courbe plane $C_n$ rencontre les axes de coordonnées $Ox$, $Oy$ en $n$ points $A_1$ . . $A_n$ ... et $B_1$, ... $B_n$ respectivement une courbe $C_p$ rencontre $C_n$ en $np$ points $\alpha_1$, ... $\alpha_{np}$ et coupe les $n$ droites $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, ... $A_n B_n$ en $\beta_1$, ... $\beta_{np}$. L'auteur démontre l'égalité des deux produits $R\alpha_1 . R\alpha_2 ... R\alpha_{np}$ et $R\beta_1 . R\beta_2 ... R\beta_{np}$, où $RM$ désigne le rapport anharmonique ($Ox$, $Oy$, OM, ON), ON étant une direction fixe. Applications de ce théorème aux courbes des second, troisième et quatrième degrés. Extension à l'espace.

8876. — Coulommiers. Imp. Paul BRODARD. — 9-27.